MIȘCAREA PERIODICĂ. OSCILAȚII

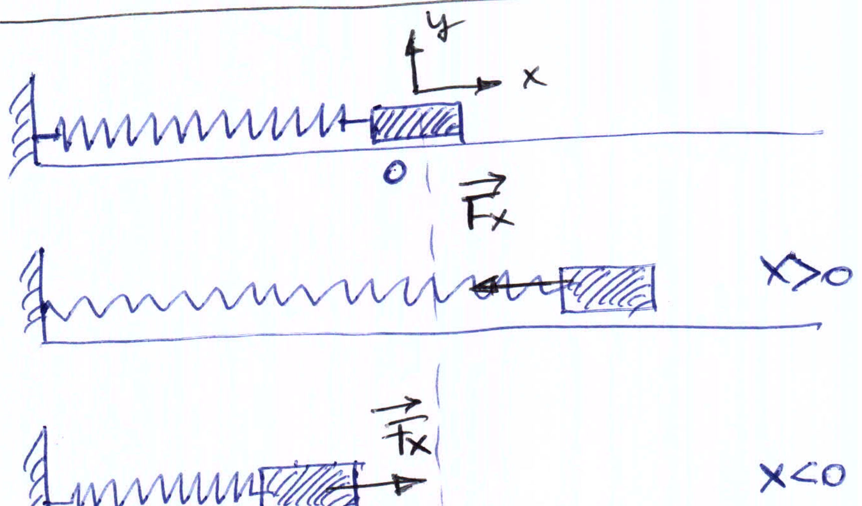
Există mișcări mecanice care au o caracteristică repetitivă: vibrațiile unui cristal de cuarț într-un ceas, pendulul, mișcările pistoanelor unui motor, ... Această categorie de mișcare se numește mișcare periodică sau oscilație.

Mișcarea oscilatorie este mișcarea unui sistem fizic care se repetă periodic în timp și simetric față de o poziție de echilibru. Corpul care efectuează o astfel de mișcare se numește oscilator.

Înțelegerea oscilațiilor este esențială pentru studiul fenomenelor ondulatorii (undelor), undelor sonore, curent electric alternativ, lumina și câmp electromagnetic, ...

Orice corp care efectuează o mișcare oscilatorie are o poziție stabilă de echilibru. Când acesta părăsește poziția de echilibru, el va fi supus unei forțe sau moment al forței care tinde să îl readucă în poziția de echilibru $\Rightarrow$ forță de tip elastic (cuplu)

① Caracteristici ale mișcării oscilatorii



Poziția de echilibru $x=0$

Când corpul se deplasează din poziția de echilibru, apare o forță de tip elastic care tinde să îl readucă în poziția de echilibru

$\Rightarrow$ oscilație - mișcare periodică în jurul

Amplitudine. Perioadă. Frecvență. Pulsație (frecv. unghiulară)

- **Amplitudinea A** reprezintă deplasarea maximă față de poziția de echilibru

$$A = \max(x) \qquad [A]_{SI} = m$$

1 ciclu complet de oscilație implică o mișcare din

$$0 \to A \to 0 \to A \to 0$$

O mișcare din $-A \to A$ reprezintă 1/2 ciclu.

- **Perioada T** reprezintă timpul necesar efectuării unui ciclu de oscilație complet.

$$[T]_{SI} = 1s$$

- **Frecvența ν** reprezintă numărul de cicluri pe unitatea de timp

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad [\nu]_{SI} = \frac{1}{s} = Hz \text{ (Hertz)}$$

Heinrich Herz = fizician german cunoscut pt cercetări în domeniul undelor electromagnetice

- **Frecvența unghiulară** (pulsația)

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu}$$

$$[\omega]_{SI} = rad/s$$

(2) OSCILATORUL ARMONIC SIMPLU

Miscarea oscilatorie armonica apare in momentul in care forta de tip elastic este direct proportionala cu deplasarea din pozitia de echilibru:

$$\boxed{F_x = -Kx}$$

Legea lui Hook pt resortul ideal.

Aplicand principiul II al dinamicii:

$$F_x = -Kx = ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0}$$

Ecuatie diferentiala de ordinul II a carei solutie va fi $x = x(t)$

ec. diferentiala a oscilatorului armonic

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \Longrightarrow$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

- Frecventa: $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$
- Perioada $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

Obs: • Perioada si frecventa miscarii oscilatorii armonice sunt complet determinate de catre masa m a oscilatorului si de catre constanta elastica k

- T si ν nu depind de amplitudinea A

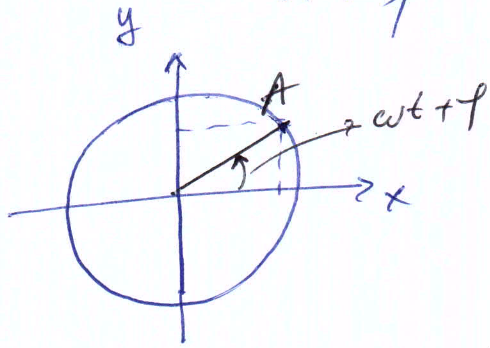
Deplasarea (elongația), viteza și accelerația

Soluția ecuației diferențiale este:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

faza mișcării oscilatorii

funcție periodică în timp

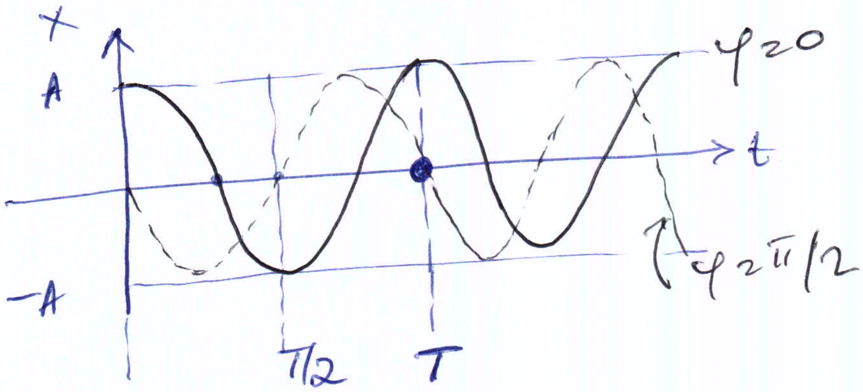


analogie cu mișcarea de rotație

fazor = vector rotitor
- modul A
- unghi $\omega t + \varphi$

$\Rightarrow x = A\cos(\omega t + \varphi)$

Proiecția fazorului pe axa Ox (efectuează) descrie o mișcare oscilatorie armonică



Viteza

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

oscilează între $v_{max} = +/- \omega A$ trecând prin zero.

Obs: $x = max \Rightarrow v = 0$
$x = 0 \quad v = max$

Accelerația

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$$
$$= -\omega^2 x$$

oscilează între $+\omega^2 A$ și $-\omega^2 A$

Obs | $x(t) = 0$ $\quad v_x = v_{max}$ $\quad a_x = 0$
$\quad a_x = a_{max}$

Energia în mișcarea oscilatorie armonică

- Energia cinetică: $E_c = \frac{1}{2} m v_x^2$
- Energia potențială $E_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$
$$v = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

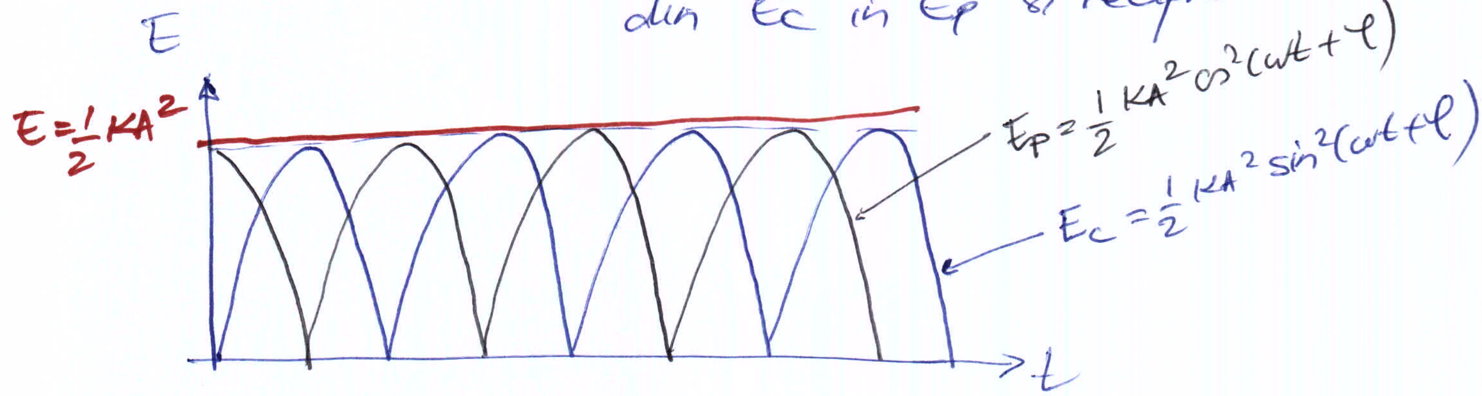
$$\Rightarrow \begin{cases} E_c = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \\ E_p = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

funcții periodice în antifază.

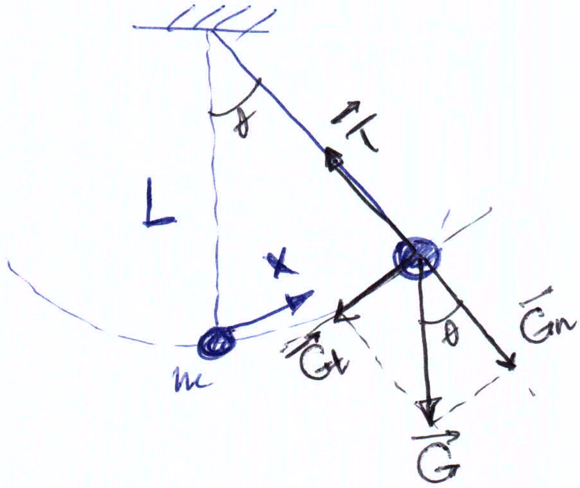
Energia totală: $\boxed{E = E_c + E_p = \frac{1}{2} kA^2}$

Energia totală a oscilatorului armonic simplu este constantă în timp.

→ conversie continuă din E_c în E_p și reciproc.



Pendulul simplu



- situație idealizată
- masa m este suspendată de un fir fără masă de lungime L

Forța care tinde să readucă sistemul în poziția de echilibru date:

$$G_t = -G \sin\theta$$ oferită de gravitație

semn opus deplasării

Pt unghiuri mici
$$\sin\theta \simeq \theta = \frac{x}{L}$$

$$\Rightarrow \quad G_t = F_x = -\underbrace{mg\frac{x}{L}}_{k}$$
$$= -kx$$ forță de tip elastic

identificând: $\Rightarrow k = \frac{mg}{L}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ k = \frac{mg}{L} \end{array}\right\} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$ pendul simplu unghiuri mici

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \boxed{\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}}$$

Obs: Perioada pendulului depinde doar de lungimea firului L și de acc gravitațională.
$\Rightarrow$ variație cu altitudinea.
Reglat pe T = 1 s la nivelul mării, odată cu creșterea altitudinii, g scade deci T crește.

③ OSCILAȚII AMORTIZATE

Oscilatorul armonic descris anterior reprezintă un caz ideal. Toate forțele care intervin în mișcarea lui mecanică sunt conservative, astfel încât energia sa mecanică totală este constantă în timp, el va oscila la infinit cu $A = const.$

Sistemele oscilatorii reale sunt supuse însă întotdeauna forțelor disipative (frecare, vâscozitate, ...), astfel încât oscilațiile se vor atenua treptat în timp, până la încetarea lor definitivă dacă nu se furnizează constant periodic energie din exterior care să compenseze disiparea.

ex: Pendulul mecanic al unui ceas continuă să oscileze datorită unei energii de tip potențial stocată în arc sau a unui sistem de greutăți care compensează energia disipată prin frecare în pivoți și angrenaje.

Descreșterea amplitudinii mișcării oscilatorii datorită disipării se numește ATENUARE sau AMORTIZARE. Mișcarea oscilatorie asociată se numește oscilație amortizată.

Cel mai simplu model pentru oscilații amortizate presupune că oscilatorul armonic suferă în plus o forță disipativă simplu proporționată cu viteza corpului care oscilează

$$F_{disipativă} = -b v_x$$

constanta care descrie amplitudinea forței disipative

Evident, asupra corpului care oscilează va acționa forța de tip elastic:

$$F_x = -kx$$

Forța rezultantă va fi:

$$\sum F_x = -kx - b v_x = -kx - b\frac{dx}{dt}$$

Principiul II al dinamicii:

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m a_x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} = 0}$$

Notăm: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

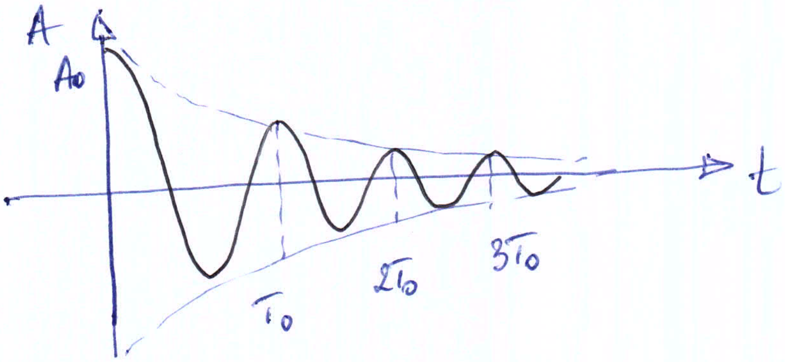
$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} = 0}$$

ecuație diferențială de ordin II similară oscilatorului armonic dar conținând un termen suplimentar $+\frac{b}{m}\frac{dx}{dt}$.

Dacă amortizarea este relativ mică, se poate arăta că soluția este:

$$\boxed{x(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega' t + \varphi)}$$

$$\boxed{\text{cu } \omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}}$$



Obs: $\boxed{1}$ $\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}} < \omega_0$

$$A = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}$$

$\Rightarrow$ amplitudinea nu este constantă ci descrește în timp.

[2]. Când $\omega' = 0 \iff \frac{K}{m} = \frac{b^2}{4m^2} \Rightarrow \omega_0 = \frac{b}{2m}$

$$\boxed{b = 2m\omega_0 = 2\sqrt{Km}}$$

Condiția se numește AMORTIZARE CRITICĂ

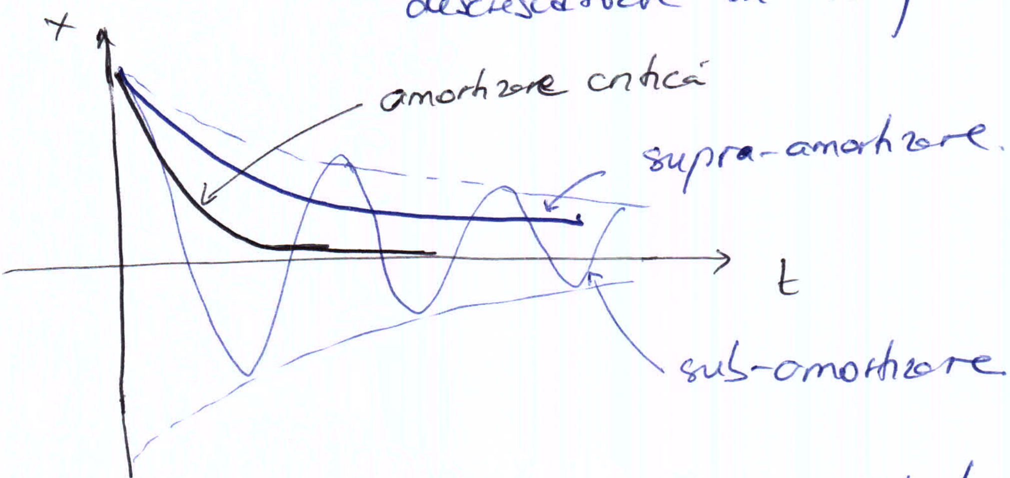
Sistemul nu mai oscilează ci se reîntoarce direct în poziția de echilibru.

[3]. Dacă $\boxed{b > 2\sqrt{Km}}$ regimul se numește de supra-amortizare.

Sistemul nu oscilează, odată scos din echilibru se întoarce în echilibru mai lent decât în amortizare critică.

[4]. Dacă $\boxed{b < 2\sqrt{Km}}$ regimul se numește sub-amortizare

Sistemul va oscila periodic cu amplitudine descrescătoare în timp



[5] Energia totală a oscilatorului amortizat scade în timp

$$E = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} K x^2$$

$$\frac{dE}{dt} = m v_x \frac{dv_x}{dt} + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} K x \frac{dx}{dt} = v_x\, m \cdot a_x + K x v_x$$

$$= v_x \underbrace{(m a_x + K x)}_{F_x} = v_x (\cancel{-Kx} - b v_x + \cancel{Kx})$$

$$= -b v_x^2 = (-b v_x) v_x = \underbrace{F_{damping} \cdot v_x}$$

scăderea energiei în timp = Puterea de disipare

Mărimi caracteristice ale oscilațiilor amortizate

① Decrementul logaritmic al amortizării

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\frac{b}{2m}T} = \frac{b}{2m} T = \delta T$$

$$\boxed{\frac{b}{2m} = \delta}$$ coeficient de amortizare.

② Timp de relaxare τ

= timpul după care amplitudinea oscilatorului scade de e ori

$e = 2{,}71828$ baza logaritmilor naturali

$$A(t+\tau) = \frac{A(t)}{e}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = \frac{1}{\delta}}$$ măsura a timpului de viață a unei oscilații amortizate

③ Factorul de calitate Q

Definește viteza de descreștere a energiei oscilatorului datorită disipării

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{E(t+T) - E(t)} = 2\pi \frac{E}{\Delta E}$$

Se poate demonstra prin calcule că:

$$\boxed{Q = \frac{2\pi}{T}\tau = \omega_0 \tau = \frac{\omega_0}{\delta}}$$

Dacă: $\delta > \omega_0 \Rightarrow Q < 1 \Rightarrow$ oscilații anarmonice (v. supra-amortizare)

$\delta < \omega_0 \Rightarrow Q > 1 \Rightarrow$ oscilații armonice amortizate (v. sub-amortizare)

Obs: Mărimile δ, τ, Q sunt caracteristice oricărui fenomen oscilatoriu amortizat independent de natura acestuia: mecanică, electrică, electromagnetică.

ex: circuitul electric R, L, C. Există o frecvență proprie a acestui circuit, rezistența R va juca rolul constantei de amortizare b (vezi final curs).

4 OSCILAȚII FORȚATE și REZONANȚA

Un oscilator amortizat izolat va înceta să oscileze după un anumit timp datorită pierderii energiei prin disipare.

Totuși, putem menține sistemul în oscilație dacă vom aplica o forță periodică din exterior cu o perioadă și o frecvență bine definite.

ex: un leagăn, care pt. a fi menținut în oscilație este re-impins la fiecare perioadă, va putea astfel oscila cu amplitudine constantă.

→ forța suplimentară externă se numește și <u>forța excitatoare</u>

$$F_E(t) = F_{max} \cos \omega_E t$$

→ oscilația sub influența forței disipative și a forței excitatoare se numește <u>oscilație forțată</u>

→ evident, forța excitatoare va impune sistemului oscilant o mișcare oscilatorie cu frecvența ω_E

→ Amplitudinea oscilației forțate va depinde de ω_E și va atinge o valoare maximă dacă ω_E se apropie de frecvența proprie a sistemului oscilant

$\omega_0 = \sqrt{K}$ ⇒ fenomenul <u>de rezonanță</u>

Principiul II al dinamicii aplicat mișcării oscilatorii forțate se scrie:

$$-Kx - bv_x - F_{max}\cos\omega_E t = m a_x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{F_{max}}{m}\cos\omega_E t = 0}$$

$$\frac{K}{m} = \omega_0^2$$

Soluția fizică a acestei ec. dif. va fi:

$$x(t) = A\cos(\omega_E t + \varphi)$$

se poate arăta că:

$$\boxed{A = \frac{F_{max}}{\sqrt{(K - m\omega_E^2)^2 + b^2\omega_E^2}}} \qquad \boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{b}{m}\omega_E}{\omega_E^2 - \omega_0^2}}$$

- Dacă $\boxed{K - m\omega_E^2 = 0}$ $\Leftrightarrow$ $\omega_E = \omega_0$

primul termen din radicalul de la numitor este zero, astfel încât A va avea un maxim lângă $\omega_E = \sqrt{\frac{K}{m}}$ (REZONANȚA)

Inaltimea peak-ului depinde de b. ($\sim 1/b$)

Cu cât amortizarea este mai mică (factor de calitate $Q = \frac{\omega_0}{\delta}$ mai mare) cu atât amplitudinea va fi mai mare a peak-ului rezonant.

- In regimul $\omega_E \to 0$ obținem $A = \frac{F_{max}}{K}$

- Obs: $\omega_E < \omega_0$; $\operatorname{tg}\varphi < 0$ $\Rightarrow$ oscilație în fază
  $\omega_E > \omega_0$; $\operatorname{tg}\varphi > 0$ $\Rightarrow$ oscilație în opoziție de fază

Discutie legată de fază

$$\boxed{tg\,\varphi = \frac{b}{m}\,\frac{\omega_E}{\omega_E^2-\omega_0^2}}$$

(vezi film)

a) ω_E mică și $\omega_E \ll \omega_0 \Rightarrow tg\,\varphi \to 0$, $\varphi \to 0$

defazajul tinde la zero

iar răspunsul la frecv. joasă este în fază cu forța externă. Oscilatorul, prin constanta K controlează răspunsul: corpul este deplasat înainte și înapoi de forța externă care acționează împotriva forței elastice

b) $\omega_E = \omega_0 \Rightarrow \begin{cases} tg\,\varphi = \infty \\ \varphi = -\pi/2 \end{cases}$ Forța este defazată față de elongație cu $-\pi/2$ $\Rightarrow$ în fază cu viteza oscilatorului

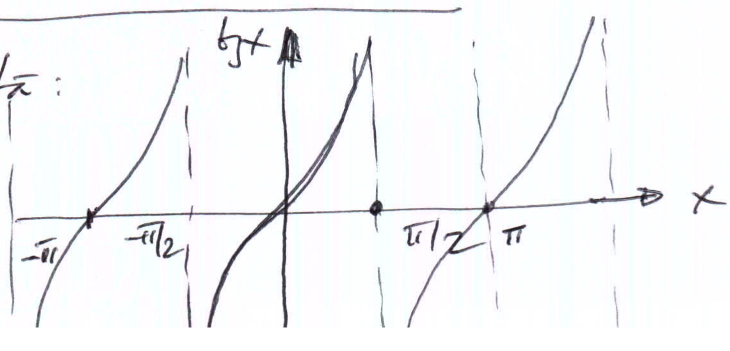
Pt ca transferul de putere să fie maxim, forța trebuie să fie maximă în momentul în care viteza oscilatorului este maximă.

c) $\omega_E > \omega_0$ ($\gg$) $\Rightarrow tg\,\varphi \to 0$ $\quad \varphi \to -\pi$

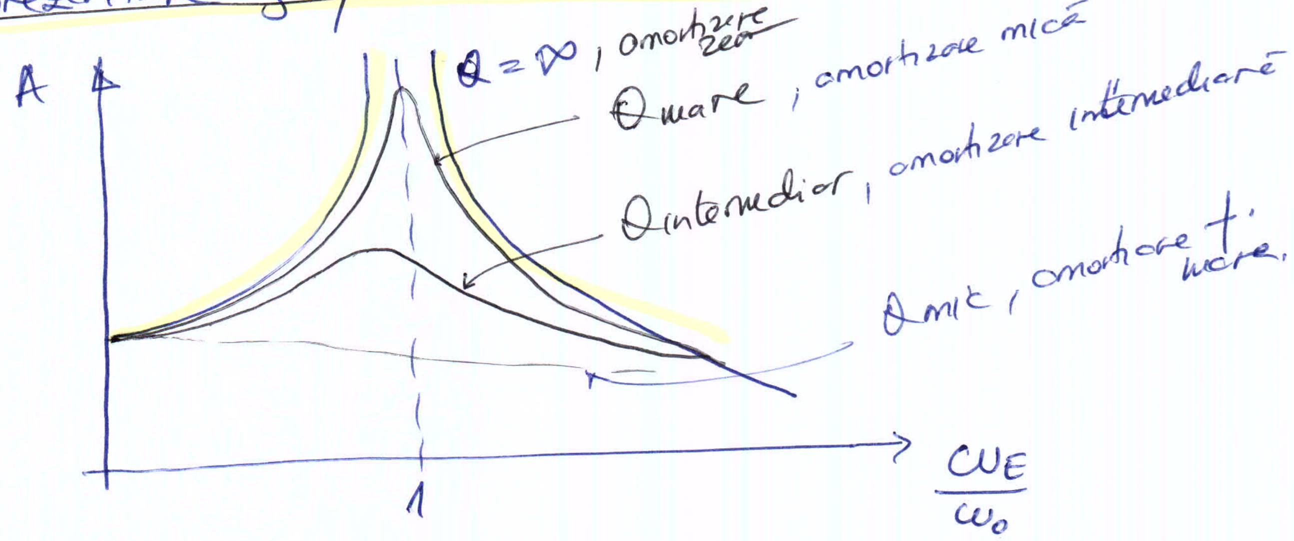
$$A \to \frac{F_{max}}{m\omega_E^2}$$

Amplitudinea descrește cu ω_E, răspunsul este controlat de inerția sistemului (m) iar masa răspunde ca un obiect liber fiind deplasată rapid înainte / înapoi de către forță $\Rightarrow$ elongația este mereu în întârziere (contrafază) față de forța exterioară

Funcția tangentă:



Reprezentare grafică a curbei de rezonanță:



Obs: În absența amortizării ($Q = \infty$, $b = \delta = 0$) la rezonanță amplitudinea oscilațiilor este infinită. ⚠

Rezonanța și consecințele acesteia

Consecințe distructive: am văzut că dacă amortizarea este mică ($\delta \to 0$, $Q \to \infty$), amplitudinea oscilațiilor la rezonanță este foarte mare $A \to \infty$. Pt. anumite sisteme mecanice aceasta poate avea consecințe dramatice:

ex (1) o companie de soldați a distrus un pod datorită marșului cadențat cu o perioadă aproape de frecvența naturală a podului. Amplitudinea oscilațiilor forțate ale podului la rezonanță a depășit limita de plasticitate a materialului conducând la fractură.

(2) dacă vibrațiile motorului unui avion coincid cu frecvența proprie a aripii, aceasta se poate rupe

$\Rightarrow$ necesitatea evitării regimului de rezonanță în sisteme în care amplificarea rezonantă a amplitudinii de oscilație are efecte negative.

Consecințe pozitive

În alte aplicații, transferul maxim de energie are loc la rezonanță. De exemplu, aceasta permite selecționarea unui canal radio / TV într-un receiver.
Receiverul ~~răspunde~~ (captează) cu maximum de eficiență pt undele electromagnetice cu o frecvență apropiată frecvenței circuitului oscilant propriu. $\Rightarrow$ recepția cu amplitudine maximă a acelei frecvențe, celelalte având o amplitudine neglijabilă.

Modificând frecvența proprie a circuitului oscilant receptor $T = 2\pi\sqrt{LC}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ prin intermediul unor elemente proprie variabile (L, C) se poate selecționa un alt post.

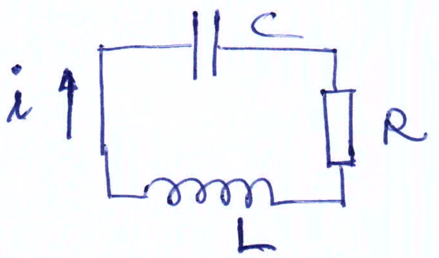
Aplicație

Analogia dintre oscilațiile mecanice și electromagnetice.

OSCILAȚII MECANICE ȘI ELECTROMAGNETICE

Oscilatorul armonic constituie un exemplu de miscare periodică de o importanță majoră, deoarece servește ca model exact sau aproximativ pentru multe probleme de fizică clasică sau cuantică.

Ne propunem să găsim expresia variației sarcinii electrice Q în funcție de timp într-un circuit RLC



Nu avem surse de tensiune în circuit => suma tensiunilor pe cele 3 componente este zero

$$V_C + V_R + V_L = 0 \qquad \left\{ \begin{aligned} V_C &= \frac{Q}{C} \\ V_L &= L\frac{di}{dt} \\ V_R &= iR \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{L}{C} = 0 \qquad \text{însă} \quad i = \frac{dq}{dt}$$

$$\Rightarrow L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0}$$

Această ecuație este analogă ec. de mișcare a oscilatorului armonic amortizat:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0}$$

$\Rightarrow$ Analogie:

$$\begin{cases} x \longleftrightarrow q \\ b \longleftrightarrow R \\ m \longleftrightarrow L \\ K \longleftrightarrow 1/C \end{cases}$$

Conform soluției problemei mecanice ; $\delta = \frac{b}{2m}$

$$x(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega' t + \varphi) \qquad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \; ; \quad Q = \frac{\omega_0}{\delta}$$

aici vom avea

$$\boxed{q(t) = q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega' t + \varphi) \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{4L^2}} \Rightarrow$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

factorul de calitate:

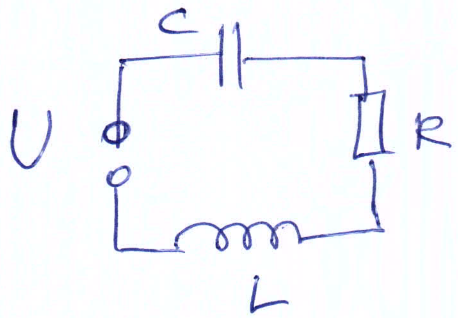
$$Q = \frac{\omega_0}{\delta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{2L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Din expresia factorului de calitate se vede că pt a obține un Q mare circuitul trebuie realizat cu rezistența cât mai mică și cu un raport $\frac{L}{C}$ cât mai mare

Oscilații electromagnetice forțate

Oscilațiile electromagnetice amortizate devin forțate dacă în circuitul RLC se introduce o sursă de tensiune alternativă

$$U = U_0 \cos \omega_E t$$



$$\Rightarrow U_C + V_R + V_L + U = 0$$

$$\frac{Q}{C} + iR + L\frac{di}{dt} + U = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} + \frac{U_0}{L}\cos\omega_E t = 0}$$

Prin analogie cu ec. def a oscilațiilor mecanice forțate în care am arătat că amplitudinea este:

$$A = \frac{F_{max}}{\sqrt{(K - m\omega_E^2)^2 + b^2\omega_E^2}}$$

vom avea:

$$\boxed{Q_{max} = \frac{U_0}{L\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega_E^2\right)^2 + R^2\omega_E^2}}}$$

$$\boxed{tg\,\varphi = \frac{\frac{R}{L}\omega_E}{\omega_E^2 - \frac{1}{LC}}}$$

Intr-un asemenea circuit ne interesează modul în care variază intensitatea curentului electric

$$i = \frac{dq}{dt} = \omega_E q_{max} \sin(\omega_E t + \varphi) = I_0 \sin(\omega_E t + \varphi)$$

unde: $$I_0 = \omega_E q_{max} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega_E C} - \omega_E L\right)^2}}$$

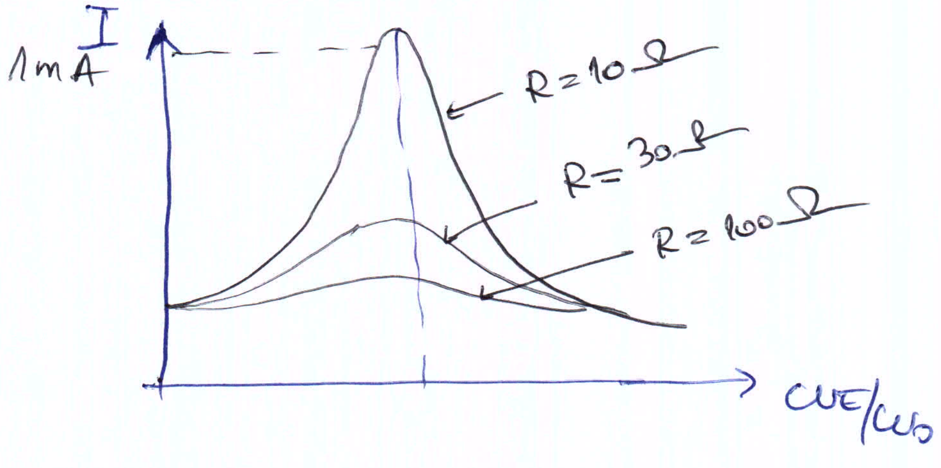
Curentul va avea un maxim pentru:

$$\frac{1}{\omega_E C} = \omega_E L \Rightarrow \boxed{\omega_E = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0}$$

adica la rezonanță când frecvența tensiunii exterioare este egală cu frecvența oscilațiilor proprii neamortizate

La rezonanță, amplitudinea oscilațiilor de curent este determinată în întregime de rezistență

$$\boxed{I_{0_{rez}} = \frac{U_0}{R}}$$



$L = 100\,\mu H$
$C = 100\,\mu F$
$E = 10\,mV$