ELECTROSTATICĂ și ELECTROCINETICĂ
"ELECTRICITATE"

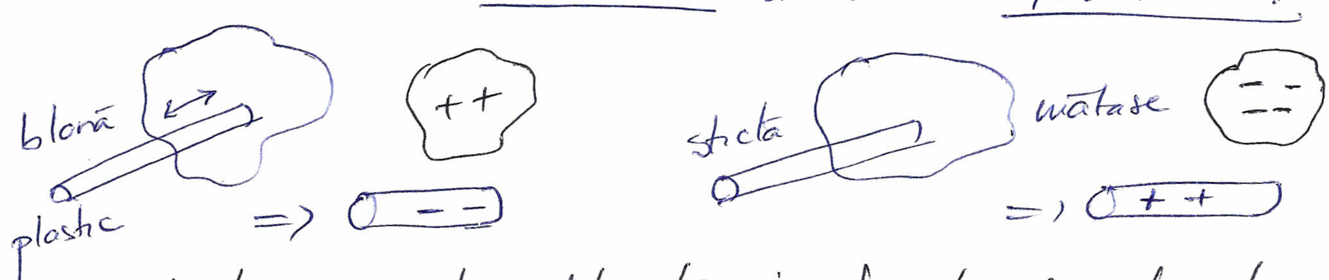
① SARCINA ELECTRICĂ $[q]_{SI} = 1C$ (Coulomb)

Interacțiunile electromagnetice implică particule care au o proprietate numită <u>sarcină electrică</u>, la fel de fundamentală ca și <u>masa</u>. Exact la fel cum corpurile care posedă masă sunt accelerate de către forțe (câmpuri) gravitaționale, tot la fel și corpurile care posedă sarcină sunt accelerate de către forțe (câmpuri) electrice.

Încă din antichitate (Grecia, 600 î.C.) s-a observat că prin frecare anumite corpuri se <u>electrizează</u>: dobândesc sarcină electrică (ex. chihlimbarul atrage alte obiecte după frecare)

"electric" ⟶ derivă din Greacă: "elektron" = "chihlimbar"

Experimentele arată faptul că există două tipuri de sarcină electrică. Benjamin Franklin (1706-1790) le-a numit: sarcini <u>NEGATIVE</u> și sarcini <u>POZITIVE</u>.



Electrizarea este diferită în funcție de tipul materialelor care se freacă unul de altul.

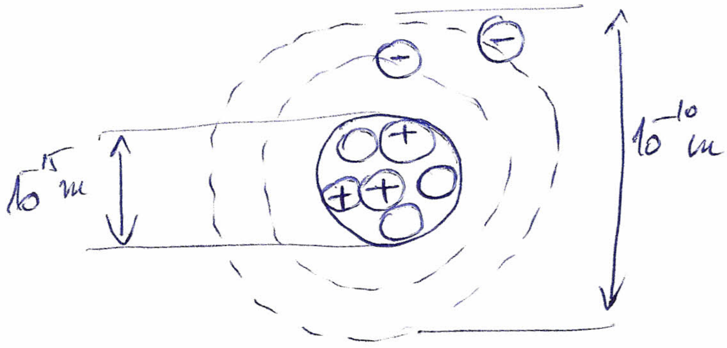
<u>Interacțiune</u>

- Sarcinile de același semn (+) sau (−) se RESPING

- Sarcinile de semn opus se atrag

Sarcina electrică și structura materiei

Atom



• <u>nucleu</u> $\sim 10^{-15}$ m

conține 99,99% din masa atomului. este constituit din:

→ protoni ⊕ p^+

→ neutroni ⊖ n_0

$M_p = 1,673 \cdot 10^{-27}$ Kg   sarcină (+)

$M_N = 1,675 \cdot 10^{-27}$ Kg   sarcină zero

• <u>Învelis electronic</u> ↪ electroni

$M_E = 9,1 \cdot 10^{-31}$ Kg   sarcină (−) egală în modul cu cea a protonului

→ <u>Protonii și neutronii</u> (nucleoni) • sunt constituiți de quarci care au sarcină electrică fracționară $\pm\frac{1}{3}e$, $\pm\frac{2}{3}e$

$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C = sarcina electronului (elementară)

<u>Obs</u>: quarci izolați nu au fost observați

• Nucleonii sunt ținuți împreună în nucleu de către <u>forța nucleară tare</u> care se opune repulsiei electrostatice dintre protoni asigurând stabilitatea nucleului atomic. Raza de acțiune a forței tari este mică, ea nu se extinde în afara nucleului (10^{-15} m).

Atomul = $\begin{cases} Z \\ A \end{cases}$ => Z electroni (−)
Z protoni (−)

=> sarcina totală nulă

• Dacă un e^- este smuls din atom => ion pozitiv M^+

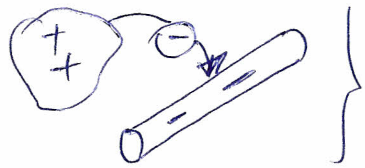
• Dacă un atom câștigă un electron => ion negativ M^-

$\Rightarrow$ incarcarea electrostatica a unui obiect $\Leftrightarrow$ creerea de ioni $\oplus$ și $\ominus$

Principiul conservării sarcinii electrice

Suma algebrică a tuturor sarcinilor electrice într-un sistem închis este constantă
= LEGE UNIVERSALĂ DE CONSERVARE

$\Rightarrow$ la electrizarea prin frecare, electronii sunt transferați de pe un obiect pe altul $\Rightarrow$ unul se încarcă pozitiv
celalalt -"- negativ



$\Delta q_{tot} = 0$

Principiul cuantificarii sarcinii electrice

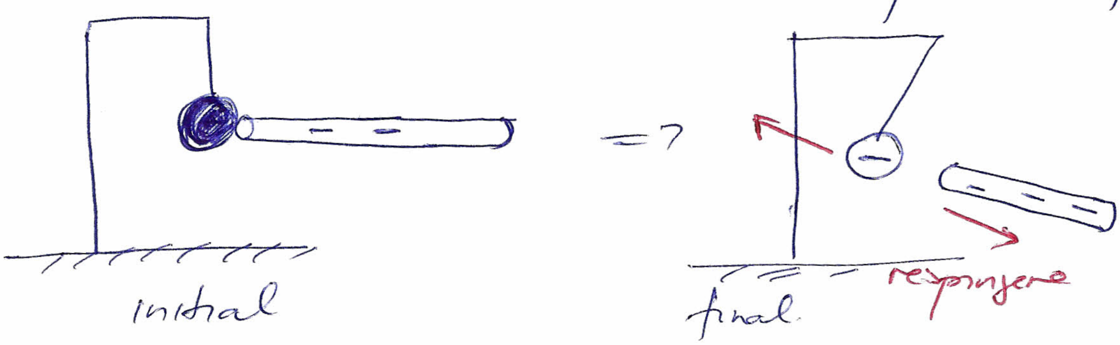
Sarcina electronului (protonului) e este considerată ca și unitate de sarcină = sarcină elementară. Sarcina oricărui obiect macroscopic nu poate fi decât ori zero ori MULTIPLU (pozitiv sau negativ) al sarcinii elementare a electronului

$$Q = n e$$

$$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ C$$

Electrizarea prin contact

$\rightarrow$ se face prin transfer direct (redistribuire) a sarcinii de pe un corp pe altul



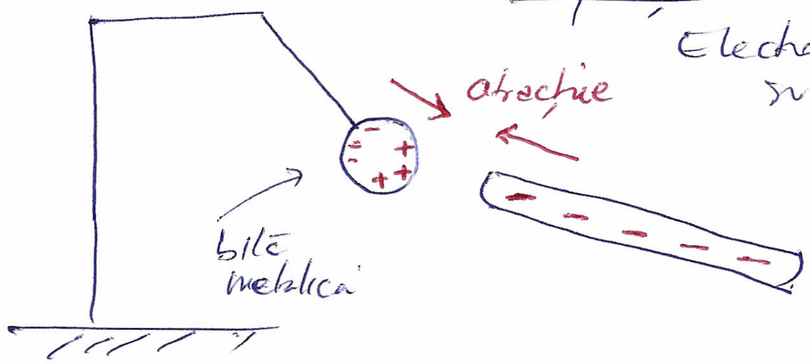
$\Rightarrow$ electrizare cu sarcini de același semn

Electrizarea prin influență (inducție)

→ cele 2 corpuri nu sunt în contact direct

→ se "induce" o sarcină de semn opus, datorită interacțiunii electrostatice dintre corpuri

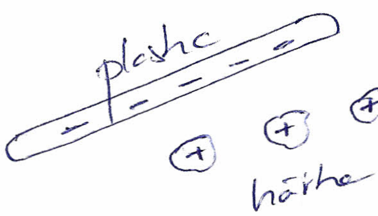
ex:

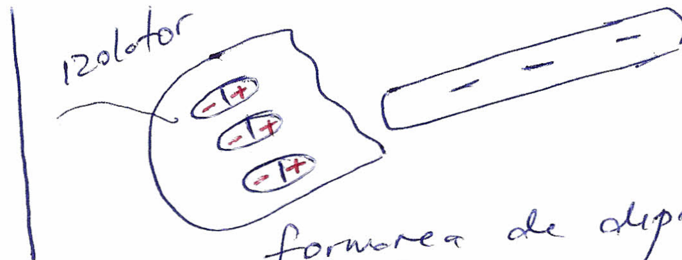


explicație

Electronii liberi din bilă sunt respinși local de către electronii în exces din tijă

obs: Datorită fenomenului de electrizare prin influență un corp încărcat electrostatic va exercita o forță atractivă asupra unor obiecte inițial neutre.





formarea de dipoli (-|+)

=> polarizare

Materiale:

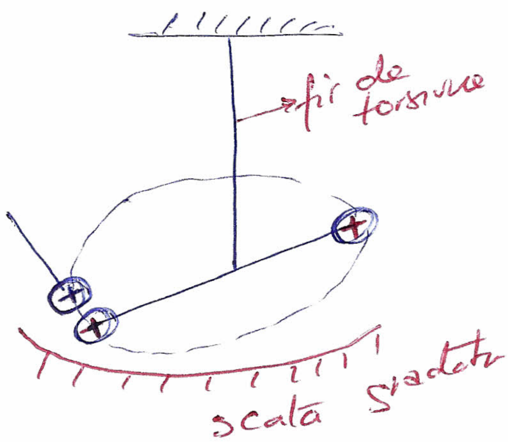
→ conductoare: permit deplasarea sarcinii electrice (ex. metale) (Cu, Fe, ...

→ izolatoare: nu permit deplasarea sarcinii electrice (nemetale, oxizi... (NaCl, MgO, Al_2O_3...

→ semiconductoare: intermediar între conductoare și semiconductoare (Si, Ge, GaAs, ...)

2 Interacțiuni Coulombiene

Charles Augustin de Coulomb (1736-1806) a studiat în detaliu forțele de interacțiune dintre particulele încărcate electrostatic în 1784. Experimente similare folosind o balanță de torsiune au fost efectuate 13 ani mai târziu de către Cavendish pt. studiul interacțiunii gravitaționale



Sarcină punctuală

= corp încărcat electric cu dimensiune **NEGLIJABILĂ** $\ll$ decât distanța care ar separa 2 corpuri

Se observă experimental că

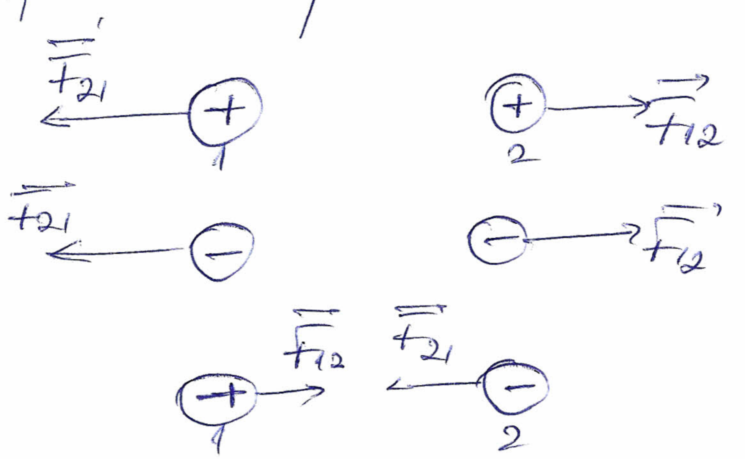
$$F \sim \frac{1}{r^2} \; ; \; F \sim q_1 q_2$$

$$\Rightarrow \boxed{F = k\,\frac{|q_1 q_2|}{r^2}}$$

Legea lui Coulomb

k = constanta de proporționalitate care depinde de sistemul de unități folosit

forță de tip acțiune-reacțiune



$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

repulsie

atracție

Obs: Interacțiunea gravitațională și electrostatică au aceeași dependență în $1/r^2$ și în $q_1 q_2 \longleftrightarrow m_1 m_2$ în ciuda naturii lor diferite. În vreme ce interacțiunea electrostatică poate fi atractivă sau repulsivă, interacțiunea gravitațională este totdeauna atractivă (masa are același semn, pozitiv).

$$[k]_{SI} = 8{,}988 \cdot 10^{9} \frac{Nm^2}{C^2} \qquad (\simeq 9 \cdot 10^{9}\ Nm^2/C^2)$$

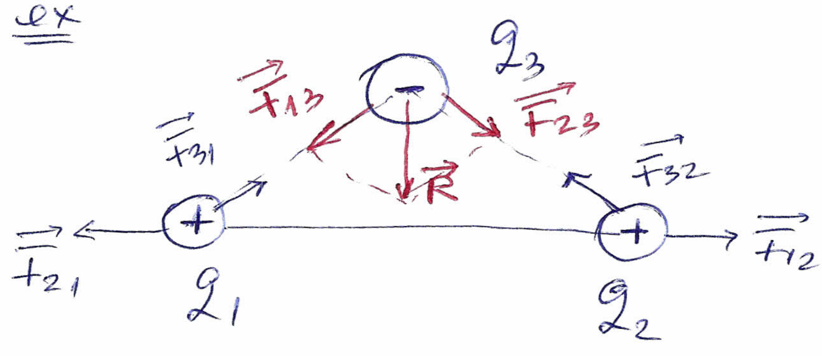
$$[k]_{SI} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \qquad \varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ C^2/Nm^2$$

permitivitatea vidului

Superpoziția forțelor electrostatice

Dacă există mai mult de 2 sarcini, ele interacționează în perechi și pt. a calcula forța asupra uneia dintre ele trebuie aplicat principiul suprapunerii forțelor:

ex

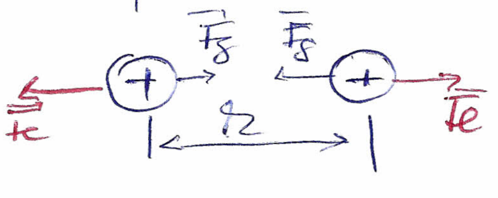


$$\vec{R} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$$

vezi seminar diverse exemple.

Interacțiune electrostatică vs. gravitațională

ex: particule $\alpha = He_2^4$ (nuclee) $\quad m = 6{,}64 \cdot 10^{-27} kg \quad q = +2e = 3{,}2 \cdot 10^{-19} C$



$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}}{G\frac{m^2}{r^2}} = 3{,}1 \cdot 10^{35} \ !!!$$

$\Rightarrow$ la scară microscopică interacțiunea gravitațională este neglijabilă (față de cea electrică)

[3] Câmpul electric $\vec{E}$ ← intensitatea câmpului electric

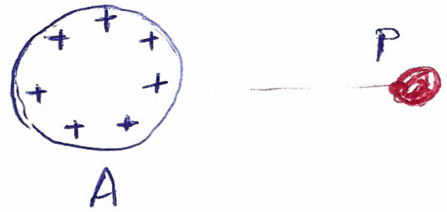
? Când două sarcini electrice aflate în vid interacționează cum "știe" fiecare de prezența celeilalte? => o nouă natură, un nou concept sunt necesare

Corpurile încărcate electrostatic modifică proprietățile spațiului din jurul lor (similar modului în care o masă modifică proprietățile spațiului din jur conducând la interacțiuni gravitaționale cu o altă masă adusă în proximitate)

↓

Orice sarcină electrică produce un <u>câmp electric</u>

Acest câmp electric exercită o forță (interacțiune) cu orice altă sarcină adusă în câmp.



sarcină test q_0

sarcina care produce câmpul $\vec{E}$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F_0}}{q_0}}$$

mărime vectorială

nu depinde de sarcina test.

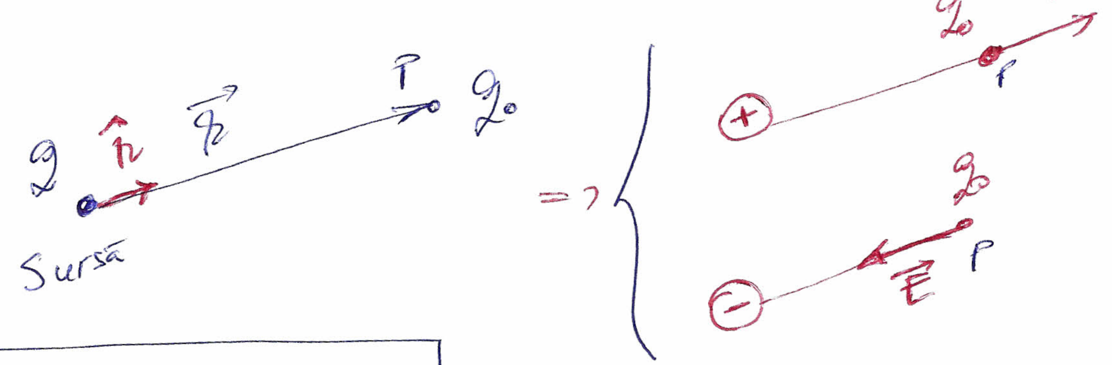
$$[E]_{SI} = \frac{1N}{1C}$$ ← Newton ← Coulomb

Cunoscând valoarea câmpului electric într-un punct se poate calcula forța care se va exercita asupra oricărei sarcini q_0 adusă în acel punct.

$$\boxed{\vec{F_0} = q_0 \vec{E}}$$

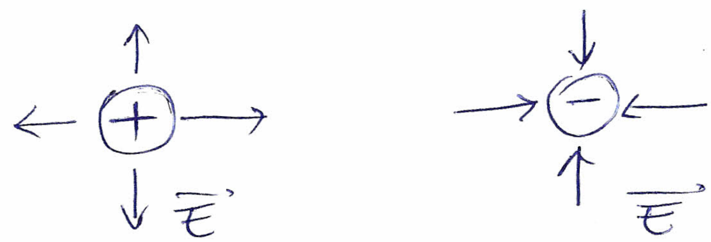
<=> cu $\vec{F_g} = m_0 \vec{g}$ din gravitație

Sarcina punctuală q



$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cdot\hat{r}}$$

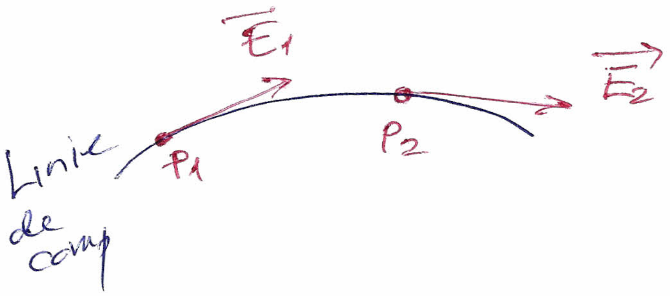
$|\hat{r}| = 1$ versorul direcției $\vec{r}$



iese din sarcină intră în sarcină

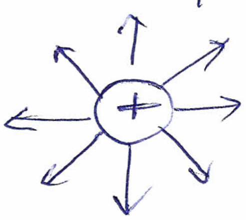
Linii de câmp

→ reprezintă niște linii imaginare astfel încât în orice punct câmpul electric să fie tangențial

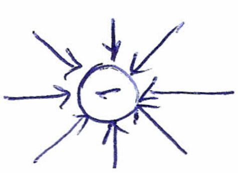


Obs: liniile de câmp nu se intersectează niciodată

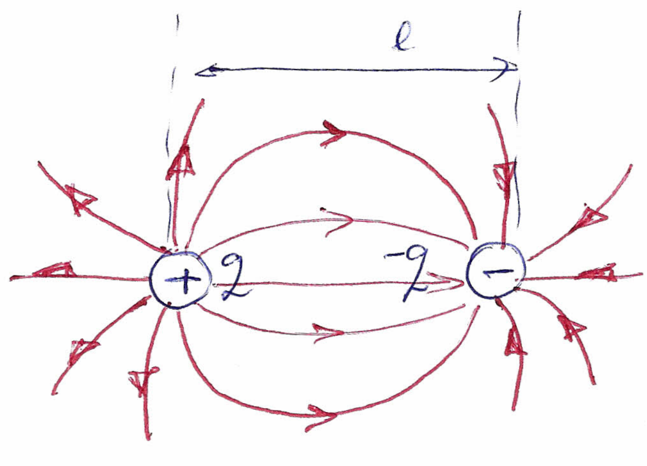
Exemple



sarcină pozitivă izolată



sarcină negativă izolată



dipol electric $+q$ $-q$ separate de distanța l

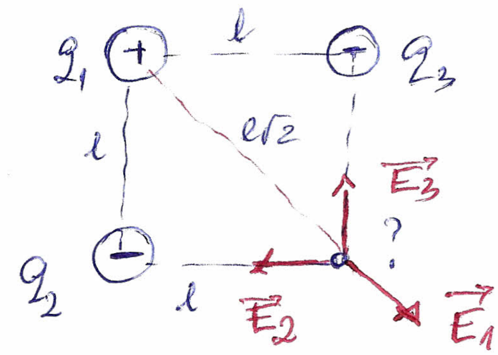
Superpoziția

Câmpul electric fiind o mărime vectorială, într-un punct din spațiu câmpul electric rezultant creat de mai multe sarcini este suma câmpurilor individuale produse de către fiecare sarcină în parte

ex:

⚠ Atenție la orientare

$$\boxed{\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i}$$



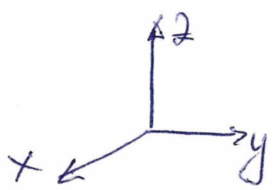
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

$$E_i = k \cdot \frac{q_i}{r_i}$$

Câmp vectorial

$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ variază de la un punct al spațiului la altul => nu este o singură mărime vectorială ci un <u>set infinit</u> de mărimi vectoriale, fiecare dintre ele fiind asociată unui punct din spațiu

=> CÂMP VECTORIAL (vector field)



$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_x(x,y,z) \\ E_y(x,y,z) \\ E_z(x,y,z) \end{cases}$$

[4] Legea lui Gauss

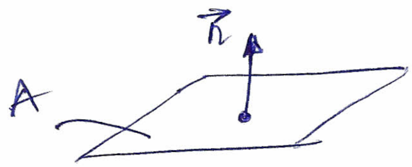
In fizică, problemele pot fi rezolvate adesea într-un mod simplificat dacă se utilizează proprietățile de simetrie ale sistemelor. Legea lui Gauss utilizează concepte de simetrie în vederea calculului câmpului electric.

Sarcina electrică și flux electric

Matematic, fluxul vectorului $\vec{E}$ printr-o suprafață $\vec{A}$ se definește ca și produsul dintre arie și intensitatea câmpului:

$$\Phi_{\vec{E}} = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA\cos\alpha = E_{\perp} A$$

flux câmp uniform



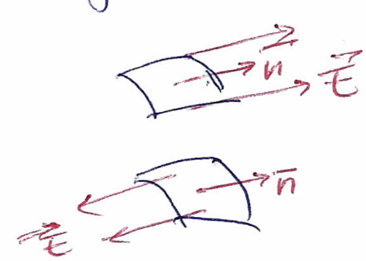
$\vec{A} = A\vec{n}$ suprafață orientată => vector suprafață

$$\Phi_{SI} = 1 \frac{N m^2}{C}$$

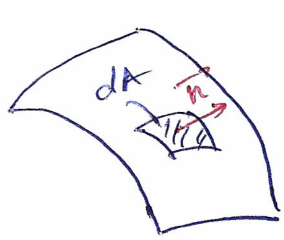
Pentru o suprafață închisă, $\vec{n}$ se alege întotdeauna înspre exteriorul suprafeței.

=> flux electric $\Phi > 0$

$\Phi < 0$



Dacă suprafața nu e plană și câmpul $\vec{E}$ variază de la punct la punct, suprafața se împarte în porțiuni mici care pot fi considerate plane și în cuprinsul lor câmpul constant =>



$$\boxed{\Phi_E = \oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}}$$

suma fluxurilor elementare ⇓ integrala dublă de suprafață

$d\Phi = \vec{E}\, d\vec{A}$ flux elementar

Legea lui Gauss

→ reprezintă o alternativă a legii lui Coulomb fiind complet echivalentă cu aceasta. A fost formulată de către Carl Friedrich Gauss (1777–1855), matematician celebru:

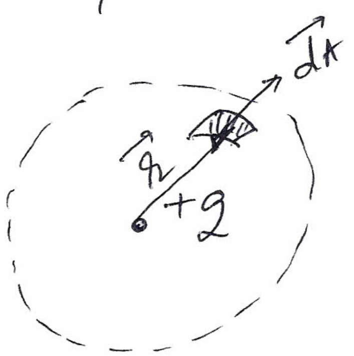
$$\boxed{\Phi_{E_A} = \oint\!\!\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{incl.}}{\varepsilon_0}}$$

Fluxul electric total printr-o suprafață închisă este egal cu sarcina netă totală închisă în acea suprafață, divizată la ε_0

Obs: Suprafețele Gaussiene sunt suprafețe închise imaginare alese astfel încât să exploateze simetria sarcinilor sau distribuțiilor de sarcină electrică

Exemple:

① Suprafața gaussiană sferică în jurul unei sarcini pozitive

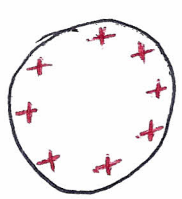


$$\Phi_E = \oint\!\!\oint_A E(r)\,dA = E(r)\oint\!\!\oint_A dA$$

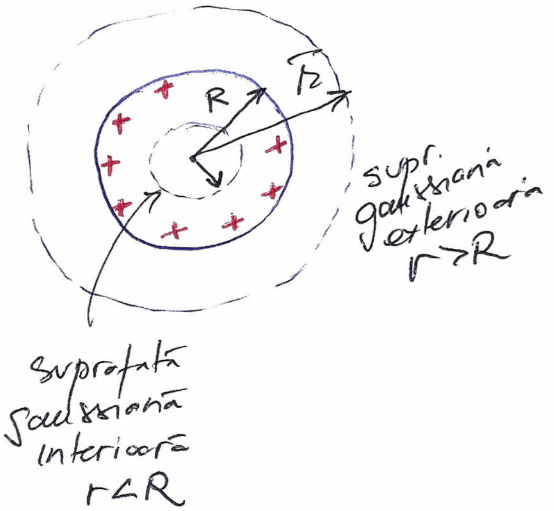
$$= E(r)\,4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} > 0$$

$$\Rightarrow E_+(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

② Câmp electric a unei sfere conductoare de rază R



Obs: În condiții de echilibru electrostatic orice sarcină electrică în exces într-un conductor se distribuie integral pe suprafața acestuia



① în exterior $r > R$

$$\Phi_E = \oiint \vec{E}(r)\, d\vec{A} = \frac{Q_{incl}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{incl}}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$E(r) = \frac{Q_{incl}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

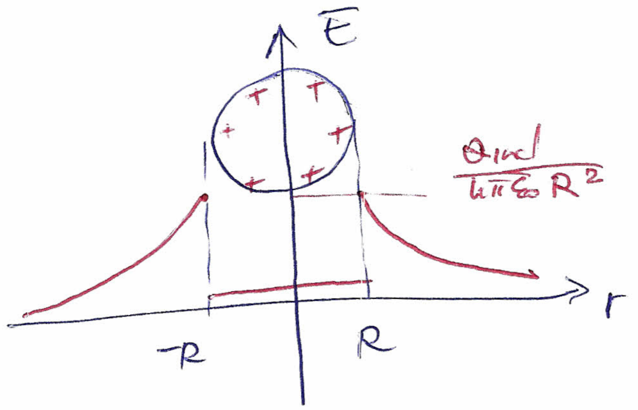
idem sarcina punctuale Q_{incl} care ar fi concentrată în $r=0$.

② în interior $r < R$

$Q_{incl} = 0$ (toată sarcina distribuită pe suprafață)

$$\Rightarrow \oiint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = E(r)\cdot 4\pi r^2 = 0 \Rightarrow E(r) = 0 \Big|_{r<R}$$

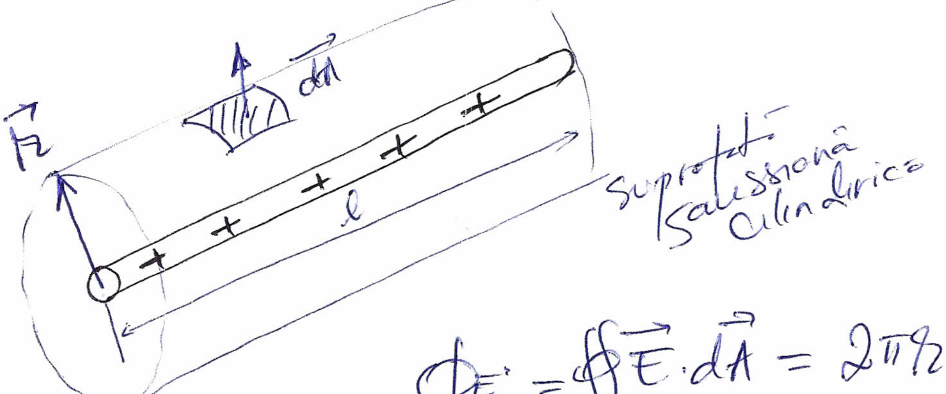
$\Rightarrow$ câmpul electric în interior este zero



③ Distribuție liniară de sarcină

distribuție liniară de sarcină de densitate

$$\lambda = \frac{Q}{l}$$



$$\Phi_E = \oiint \vec{E}\cdot d\vec{A} = 2\pi r l\, E(r) = \frac{Q_{incl}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

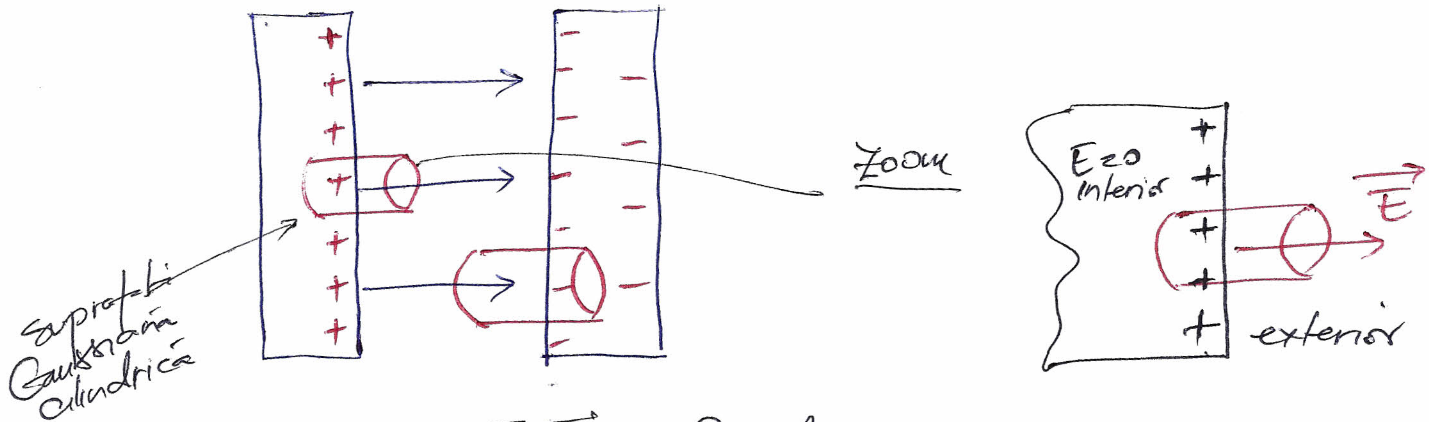
$$\Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{\lambda}{r}}$$

(4) Câmpul electric între două plăci paralele încărcate cu $+Q$ și $-Q$ => condensator plan

plăci metalice => întreaga sarcină Q este distribuită pe exteriorul plăcii

$$Q = \sigma A$$

A = aria plăcii
σ = densitate de sarcină



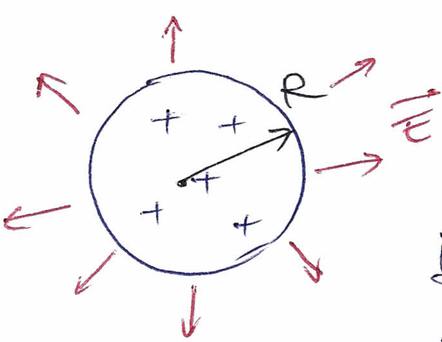
$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{incl}}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

are aceeași valoare în orice punct dintre plăci
=> câmp uniform

(5) Sferă izolatoare uniform încărcată electrostatic

=> sarcina uniform distribuită în volumul sferei



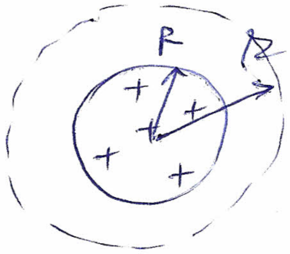
$$Q = \rho V = \rho \cdot \frac{4\pi R^3}{3}$$

densitate volumică de sarcină

Din considerente de simetrie $\vec{E}$ este radial și deci perpendicular în orice punct pe suprafața gaussiană sferică

Considerăm și aici 2 situații: $r < R$
$r > R$

① $r > R$ $Q_{incl} = Q$ (toată sarcina este conținută în interiorul suprafeței Gaussiene)



$$\Phi_E = \oiint \vec{E}\cdot d\vec{A} =$$
$$= E(r)\,4\pi r^2 = \frac{Q_{incl}}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$E(r) = \frac{Q_{incl}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

② $r < R$ În interiorul supr gaussiene este conținută doar o parte din sarcina totală:

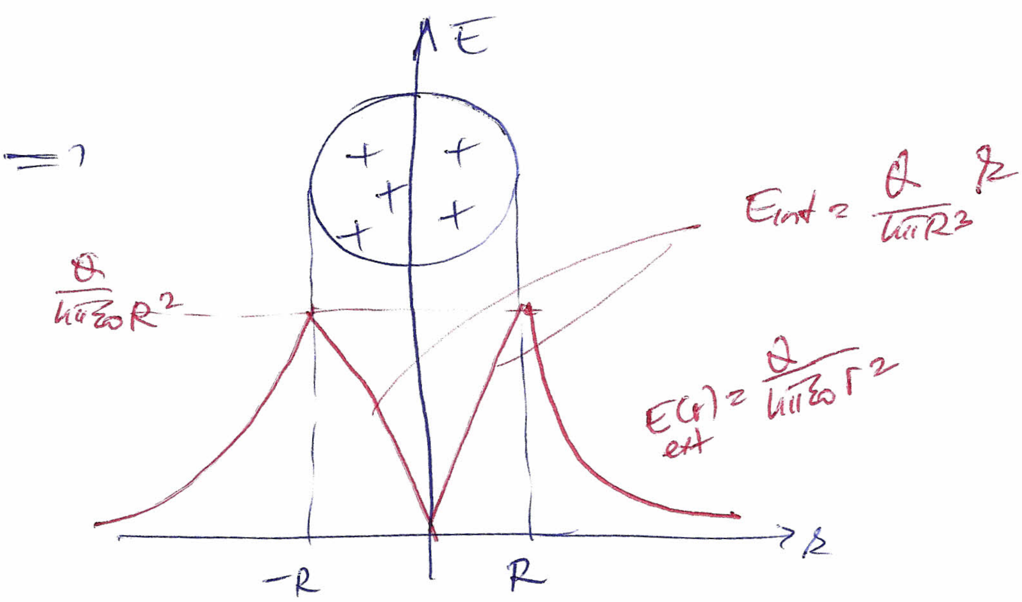
$$Q_{incl} = \rho\cdot V = \rho\cdot\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{Q}{\frac{4\pi R^3}{\cancel{3}}}\cdot\frac{4\pi r^3}{\cancel{3}}$$

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4\pi R^3}{3}}$$

$$Q_{incl} = Q\,\frac{r^3}{R^3}$$

$$\Rightarrow E(r)\,4\pi \cancel{r^2} = Q\,\frac{r^{\cancel{3}}}{R^3} \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{Q\,r}{4\pi R^3}}_{r<R}$$

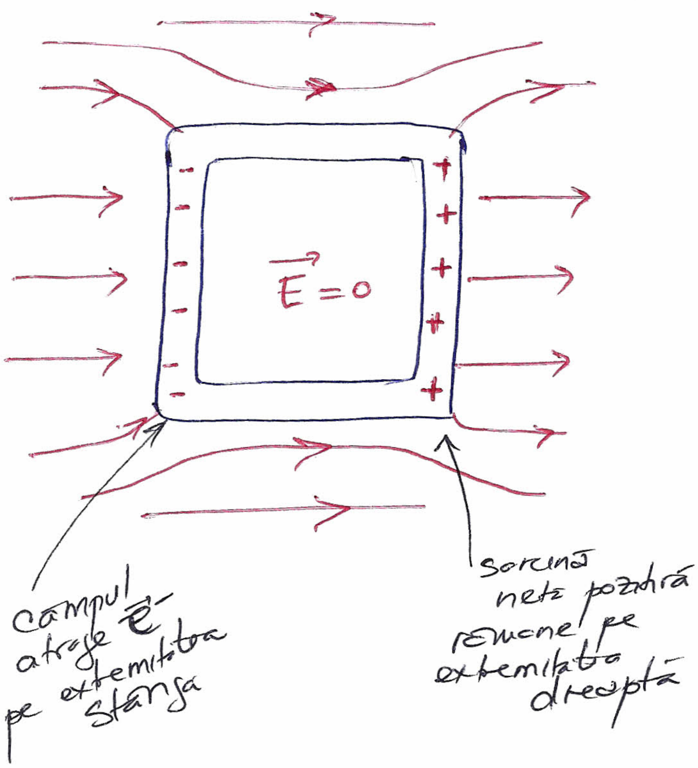
$\Rightarrow$



Ecranarea electrostatica. Cusca Faraday

Se utilizează pentru protecția instrumentelor sensibile de câmpuri electrice. Instrumentul se introduce fie într-o cutie constituită dintr-un material conductor, fie dintr-o folță de cupru.

Câmpul electric extern va redistribui electronii liberi din conductor producând o sarcina netă pozitivă într-o zonă respectiv negativă în zona opusă (vezi fig). Această redistribuire a sarcinii conduce la un câmp electric suplimentar astfel încât câmpul electric total în fiecare punct din interiorul cutiei să fie zero, după cum cere legea lui Gauss. Dispozitivul obținut se numește <u>cușcă Faraday</u>



Aplicație

① Unul dintre cele mai sigure locuri în timpul unei furtuni este interiorul unui automobil. Sarcina produsă de un trăsnet rămâne pe carcasa metalică, în interior câmpul electric fiind zero.

② Ecranarea câmpurilor electromagnetice

lipsă semnal / semnal slab în interiorul cuștilor metalice (semnal radio, TV, telefon = undă electomagnetică = câmp electric + câmp magnetic) => necesitatea antenelor externe pt captarea semnalului

<u>ex</u>: în <u>mașină</u>.

5 POTENȚIALUL ELECTRIC

Când o particulă încărcată electric se deplasează într-un câmp electric, acesta va exercita o forță asupra particulei și efectua un lucru mecanic. Întrucât câmpul electric este un câmp conservativ, acest lucru mecanic se va putea exprima ca o variație a unei energii potențiale electrice. Exact la fel cum energia potențială gravitațională depinde de masă și de poziția acesteia față de suprafața terestră, și energia potențială electrostatică va depinde de poziția particulei încărcate în câmpul electric. Vom descrie energia potențială electrică introducând o nouă mărime fizică numită POTENȚIAL ELECTRIC sau simplu POTENȚIAL. În circuite electrice, diferența de potențial de la un punct la altul se numește TENSIUNE.

Energia potențială electrică

Din mecanică, lucrul mecanic efectuat de forța $\vec{F}$ pt a deplasa o particulă din punctul a în b este:

$$L_{ab} = \int_a^b \vec{F}\, d\vec{l} = -\Delta U = U_a - U_b$$

„–" variația energiei potențiale

$$\boxed{L_{ab} = \int_a^b q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = U_a - U_b}$$

Dacă q_0 se deplasează în același sens cu forța $\vec{F} = q_0 \vec{E}$

$\Rightarrow L_{ab} > 0 \Rightarrow U_a > U_b \Rightarrow$ energia potențială descrește

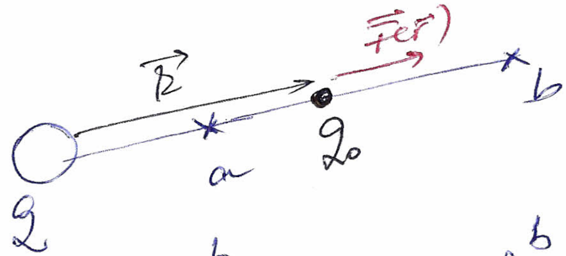
în sens invers forței $\vec{F} = q_0 \vec{E}$

$\Rightarrow L_{ab} < 0 \Rightarrow U_a < U_b \Rightarrow$ energia potențială crește

Energia potențială a două sarcini punctuale

(1) $q \rightarrow$ sursa de câmp $\vec{E}$

(2) $q_0 \rightarrow$ sarcina test asupra careia forța $q_0\vec{E}$ exercită lucru mecanic

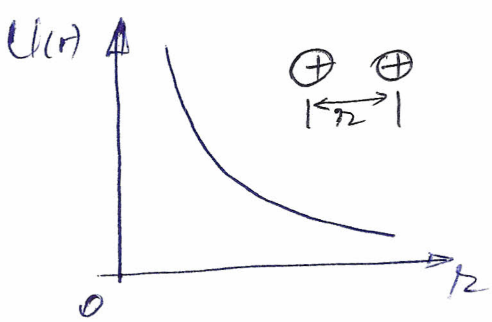


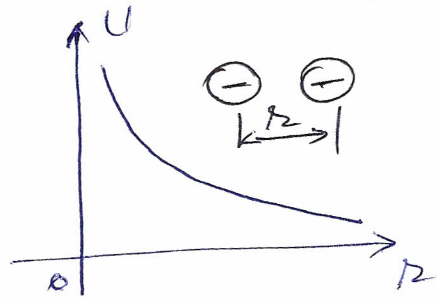
$$F(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q q_0}{r^2}$$

$$L_{ab} = \int_a^b \vec{F}(r)\,\vec{dr} = \int_a^b \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q q_0\,dr}{r^2} = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$

$$= U_a - U_b$$

$\Rightarrow$ energia potențiala va fi: $\boxed{U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q q_0}{R}}$

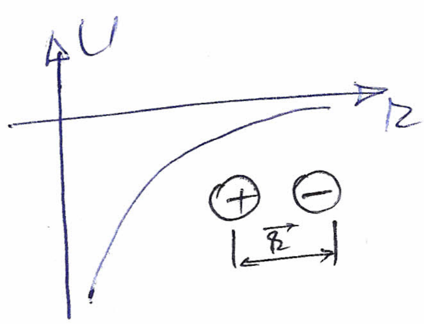




sarcini de aceloși semn

$U \rightarrow \infty$ cand $r \rightarrow 0$
$U \rightarrow 0$ cand $r \rightarrow \infty$

$\Rightarrow$ repulsia conduce ~~$(r \nearrow)$~~ la stare mai stabilă (U mai mic.)



$U \rightarrow -\infty$ cand $r \rightarrow 0$
$U \rightarrow 0$ cand $r \rightarrow \infty$

sarcini de semn opus

$\Rightarrow$ atracție

Observație: Energia potențială este întotdeauna definită în raport cu un punct de referință în care $U \rightarrow 0$ ($r = \infty$ pt sarcini de aceloși semn).

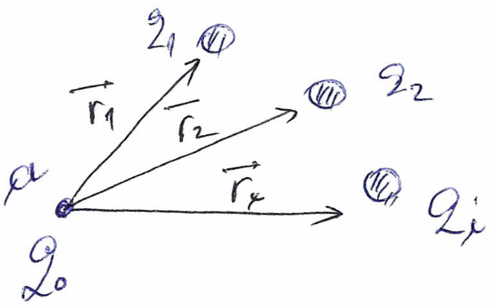
Din $L_{ab} = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) = U_a - U_b \Rightarrow$ dacă $r_b = \infty$

$$\boxed{L_{a\to\infty} = U_a}$$

$\Rightarrow$ Energia potențială U într-un punct este egală cu lucrul mecanic efectuat de forțele câmpului pentru a deplasa o sarcină de probă din acel punct la infinit.

Cazul unei sarcini q_0 într-un câmp produs de un ansamblu de sarcini q_i

$\Rightarrow$ superpoziție scalară întrucât energia potențială este o mărime scalară.



$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \dots \frac{q_i}{r_i} + \dots\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

Pt. un ansamblu de sarcini q_i, q_j separate de r_{ij} $\Rightarrow$ $\boxed{U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}}$

Potențialul electric

este energia potențială / unitatea de sarcină

$$\boxed{V = \frac{U}{q_0}} \iff U = q_0 V$$

↳ mărime scalară

$[V]_{SI} = 1V$ (Volt)

$1\,\text{Volt} = \frac{1J}{1C}$

Din: $\frac{L_{ab}}{q_0} = \frac{U_a - U_b}{q_0} = V_a - V_b = V_{ab}$

diferența de potențial sau tensiune

V_{ab}, potențialul lui a în raport cu b reprezintă lucrul mecanic al forței electrice efectuat asupra unei sarcini unitare deplasate din a în b.

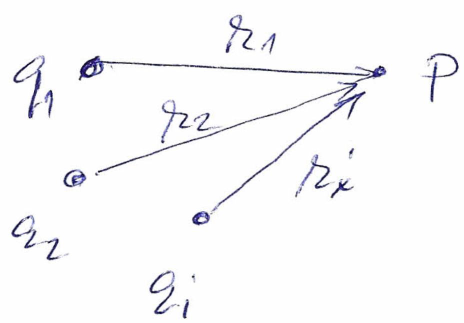
Calcularea potențialului electric

- Pentru o sarcină punctuală $\qquad V = \frac{U}{q_0} \Rightarrow$

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}}$$

- Pt. o colecție de sarcini q_i $\Rightarrow$ suma scalară

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}}$$



- Distribuție continuă de sarcină
$\Rightarrow$ formule integrale

(se divizează sarcina în entități elementare dq și apoi se sumează prin integrare

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r}$$

Potențialul electric calculat din câmp electric

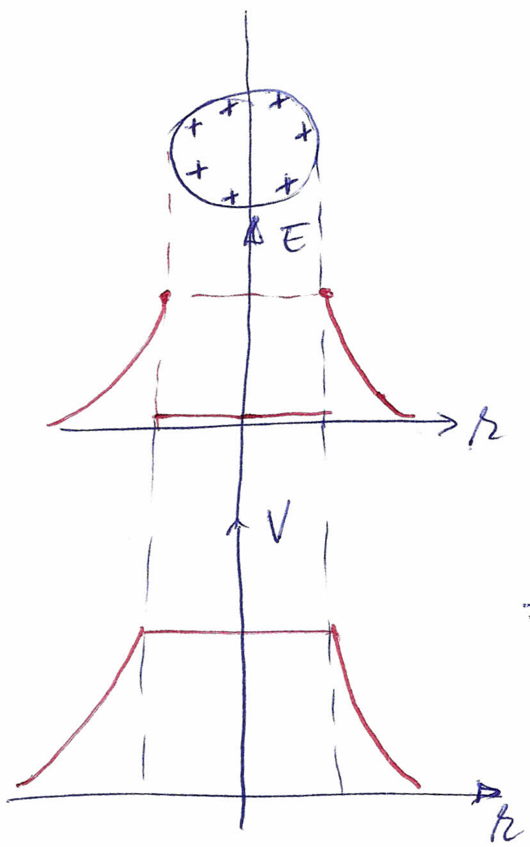
$$\frac{L_{ab}}{q_0} = V_a - V_b = \int_a^b \frac{\vec{F}}{q_0}\cdot \vec{dl} = \int_a^b \vec{E}\cdot\vec{dl}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot \vec{dl}}$$

Dacă $b \to \infty$ și $V_b = 0$ $\Rightarrow \boxed{V_a = \int_a^{\infty} \vec{E} \cdot \vec{dl}}$

Exemple

① Sfera conductoare, sarcină uniform distribuită pe exterior



Folosind legea lui Gauss am calculat

$$E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} & r > R \\ 0 & r < r \end{cases}$$

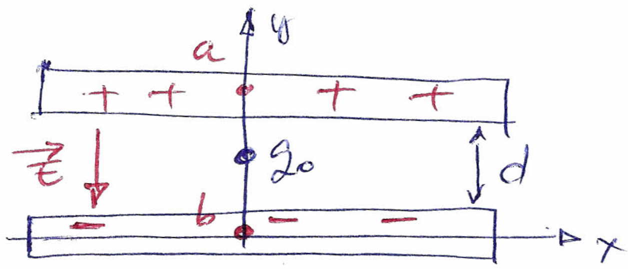
a) $r > R$ $\quad V(r) = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot \vec{dr} = \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\Big|_r^{\infty} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

b) $r < R$ $\quad V(r) = \int_r^{\infty} E(r)\,dr = \int_r^{R} \underbrace{E(r)}_{0}\,dr + \int_R^{\infty} E(r)\,dr =$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = ct$$

② Placi metalice separate (condensator)

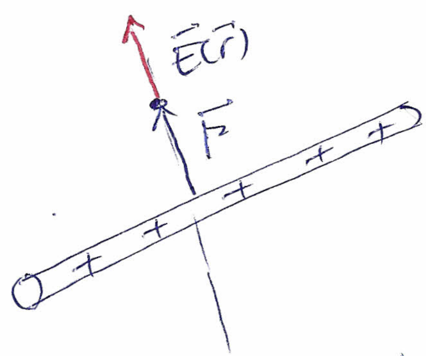


$$V_a - V_b = \int_a^b E\,dl = E d$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{V_a - V_b}{d} = \frac{V_{ab}}{d}}$$

③ Distributie liniară (infinită) de sarcină

cu densitatea $\lambda = \frac{q}{l}$



am dedus folosind legea lui Gauss

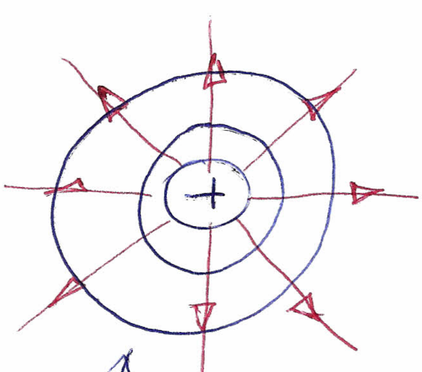
$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$V_a - V_b = \int_a^b E(r)\,dr = \int_{r_a}^{r_b} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_b}{r_a}$$

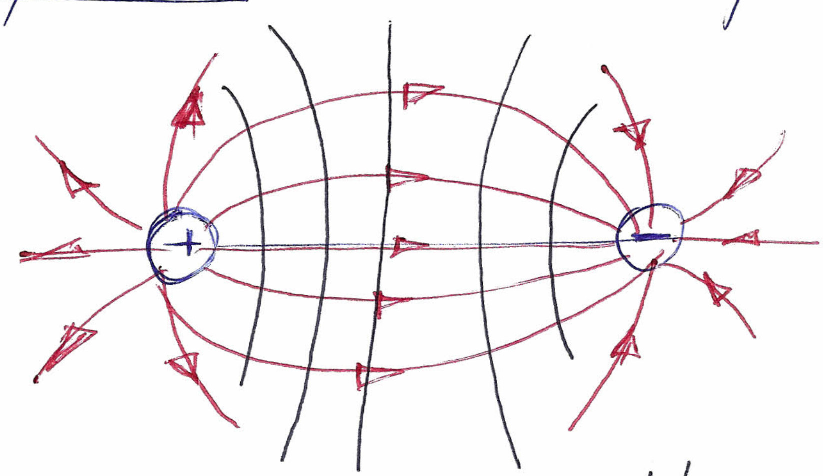
Suprafete echipotentiale

= suprafete de potential constant

= sunt perpendiculare la liniile de camp



suprafete echipotentiale = sfere

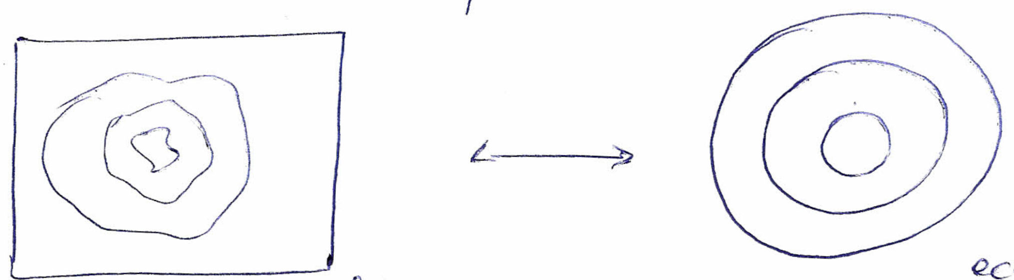


suprafeta echipotentială

Obs:

- Există o analogie cu hărțile topografice în care curbele de nivel reprezintă punctele care au aceeași elevație => aceeași energie potențială gravitațională.

Aici, pe o suprafață echipotențială electrică, energia potențială electrică va fi constantă.



Suprafețe echipotențiale și conductori

Când toate sarcinile electrice sunt în repaos,

(1) suprafața conductorului este o suprafață echipotențială

(2) toate punctele din interiorul conductorului vor avea același potențial

(3) Când doi conductori încărcați electrostatic se pun în contact printr-un fir, sarcina se va redistribui între cei doi conductori, astfel încât în final să se ajungă la același potențial

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1} \qquad V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2}$$

(inițial)

$$V_1' = \frac{q_1'}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = V_2' = \frac{q_2'}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

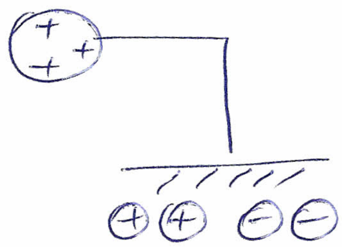
$$\Rightarrow \begin{cases} V_1' = V_2' \iff \dfrac{q_1'}{r_1} = \dfrac{q_2'}{r_2} \\ q_1 + q_2 = q_1' + q_2' \quad \text{conservarea sarcinii electrice} \end{cases}$$

q_1', q_2' $\Leftarrow$

Legarea la Pamânt = impamântarea

Prin conectarea cu un fir conductor la Pamânt a unui conductor metalic încărcat electric, potențialul acestuia va egala potențialul Pamântului, ca referință luată egală cu zero.

=>



$V = 0$

Pamântul poate fi considerat ca un rezervor infinit de sarcini pozitive și negative. Prin firul conector sarcina netă totală de semn opus necesară neutralizării va fi transferată obiectului încărcat pt a ~~reduce~~ reduce la $V_{final} = 0$

Gradient de potențial

Legătura dintre potențial și câmp electric se scrie:

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot \vec{dl} \quad <=>$$

$$\int_b^a dV = -\int_a^b dV = \int_a^b \vec{E} \cdot \vec{dl} \quad => \quad -dV = \vec{E}\,\vec{dl}$$

dar

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$$

$$\vec{dl} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{dl} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

$$=> -dV = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

dacă $V = V(x, y, z)$ =>

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

diferențiala funcției V

=>

$$\Rightarrow \begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right) = -\operatorname{grad} V = -\nabla V}$$

$$\nabla \text{ (nabla)} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$$\boxed{\text{Câmpul electric} = \text{gradientul potențialului}}$$

în fiecare punct $\vec{E}$ este în direcția în care V descrește cel mai rapid și este întotdeauna perpendicular pe suprafața echipotențială în acel punct

Obs: Dacă $E(r)$ este radial în raport cu un punct sau o axă $\Rightarrow$

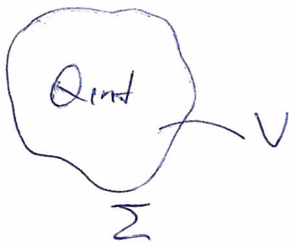
$$E(r) = -\frac{V(r)}{\partial r}$$

ex: $V(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ $\rightarrow$ potențialul unei sarcini punctiforme

$$\Rightarrow E(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

Ecuațiile Poisson și Laplace

Teorema lui Gauss => pe o suprafață care mărginește volumul V



$$\oiint_\Sigma \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Teorema Gauss-Ostrogradski

$$\boxed{\oiint_\Sigma \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_V \nabla\cdot\vec{E}\, dV}$$

transformă o integrală de suprafață în integrală de volum

Divergența

$$\nabla\cdot\vec{E} = \operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

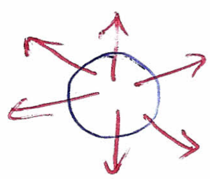
produs scalar dintre

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$ operator diferențial vectorial nabla

și

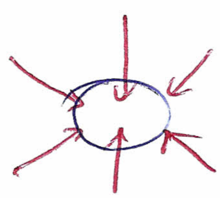
$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$$

Divergența măsoară expansiunea sau contracția unui câmp vectorial



izvor pozitiv (sursa)

$\operatorname{div}\vec{E} > 0$



izvor negativ

$\operatorname{div}\vec{E} < 0$

o descrie modificările care pot să apară asupra unui câmp vectorial. În absența creării sau distrugerii materiei, densitatea ei într-o regiune dată variază doar prin flux care intră sau iese!

Gauss $\Longrightarrow$ Ostrogradski $\oint\!\!\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_V \nabla\cdot\vec{E}\, dV = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \int_V \frac{\rho\, dV}{\varepsilon_0}$

unde $\rho = \frac{dq}{dV}$ densitate volumică de sarcină

$$\Rightarrow \boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0}$$

Legea lui Gauss pt. câmpul electric în formă diferențială (1 ec. a lui MAXWELL) vezi mai încolo...

Întrucât $\vec{E} = -\nabla V$

$$\Rightarrow \nabla\cdot(\nabla V) = -\rho/\varepsilon_0 \Rightarrow \boxed{\nabla^2 V = \Delta V = -\rho/\varepsilon_0}$$

Ecuația lui Poisson

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ Operator Laplace

Cunoscând distribuția de sarcină $\rho(x,y,z)$, prin rezolvarea (analitică / numerică) a ecuației lui Poisson se obține potențialul electric $V(x,y,z)$

- Dacă $\rho(x,y,z) = \rho(\vec{r}) = 0 \Leftrightarrow$ nu există sursă de sarcină electrică

$$\Rightarrow \boxed{\Delta V = 0}$$ Ecuația lui Laplace

Obs: Ecuațiile Poisson și Laplace sunt ecuații diferențiale de ordinul II care prin rezolvare + condiții limită conduc la $V(x,y,z)$.