(Unde 1)

UNDE MECANICE

Ondulațiile apei unui lac produse de aruncarea unei pietre, seismele, vibrația unei sore lovite lateral, vibrația membranei unei tobe, vibrație unei coarde a unui instrument muzical sunt toate exemple de fenomene ondulatorii sau unde. Fenomenele ondulatorii sunt printre cele mai importante fenomene în tehnică.

Unda se produce când un sistem este scos din echilibru și când această perturbație se propagă dintr-o regiune a spațiului în alta.

Prin undă se înțelege fenomenul de propagare a unei oscilații într-un mediu material sau spațiu și care este însoțit și de transport de energie.

EX: – energia din undele luminoase provenite de la soare care încălzesc Pământul.
– energia undelor seismice care produce distrugerea clădirilor

Există două mari clase de unde:

→ unde MECANICE: necesită un mediu material pentru propagare

→ unde ELECTROMAGNETICE: nu necesită mediu material pt propagare, se pot propaga și în vid
- lumina
- unde radio
- radiație IR, UV, ...
- raze X, γ, ...

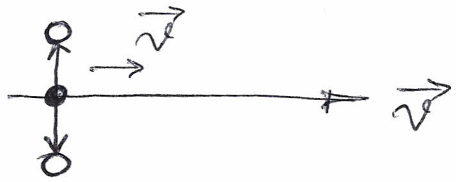
1 CLASIFICAREA UNDELOR MECANICE

Unda mecanică reprezintă o perturbație (oscilație) care se propagă într-un material sau substanță numită MEDIU de propagare.

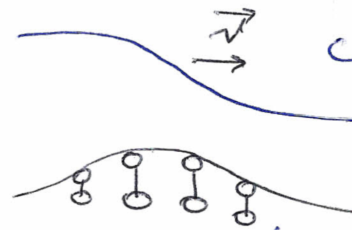
Când unda se propagă în mediu, particulele constituente ale mediului efectuează mișcări oscilatorii de un anume tip, în funcție de natura undei.

În figurile de mai jos ilustrăm diferite tipuri de unde mecanice:

→ unde transversale: oscilația particulelor mediului este transversală, perpendiculară la direcția de propagare a undei.



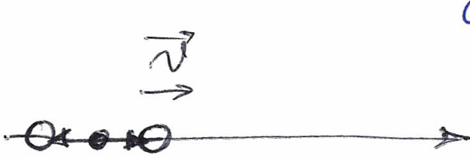
ex:



coardă

unda progresivă într-o coardă elastică

→ unde longitudinale: oscilația particulelor mediului se face de-a lungul direcției de propagare a undei



ex: undele sonore

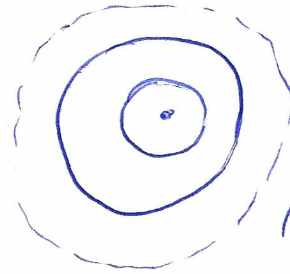
→ Există unde propagatoare complexe care au atât componente longitudinale cât și transversale. EX: undele de suprafață pe un lichid

Toate aceste 3 tipuri de unde au anumite caracteristici comune:

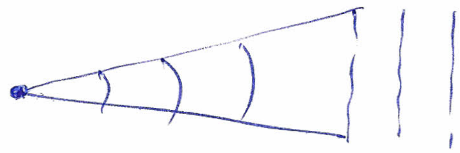
FRONTUL DE UNDĂ: locul geometric al punctelor din spațiu în care a ajuns unda la un moment de timp t în mediul în care se propagă

După forma frontului de undă, undele se clasifică în:

→ unde plane
→ unde circulare
→ unde sferice



undă circulară, perturbația inițiată în centru



la distanță mare față de centru, o undă circulară poate fi aprox. cu o undă plană.

Caracteristici ale undelor

1. Viteza undei → viteza de deplasare a frontului de undă
   → determinată de proprietățile mecanice ale mediului
   → nu este echivalentă cu viteza de oscilație a particulelor mediului

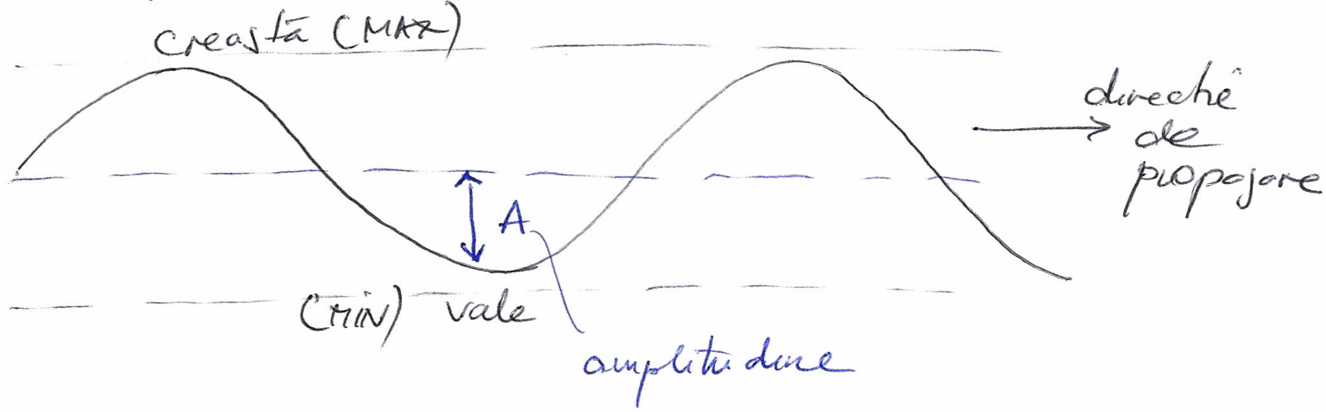
2. Mediul propriu-zis nu se deplasează la propagarea unei unde, particulele constituente efectuează doar o mișcare oscilatorie care se propagă / transmite din aproape în aproape.

3. Pentru a iniția o undă avem nevoie de un aport de energie sau lucru mecanic în sistem. Mișcarea ondulatorie va transporta energia respectivă dintr-o zonă în alta a mediului de propagare.
   ⇒ undele transportă energie nu materie

2 UNDE PERIODICE

O undă transversală produsă prin scuturarea capătului liber al unei corzi reprezintă un exemplu de puls de undă. Tensiunea din coarda deformată va readuce coarda la forma inițială odată ce pulsul a trecut.

O situatie mult mai interesanta este cea in care capatul liber al corzii este scuturat repetitiv sub forma unei miscari oscilatorii periodice. In aceasta situatie, la propagarea undei produse, fiecare particulă a corzii va efectua o miscare oscilatorie periodică in punctul in care a ajuns unda la momentul t. Obtinem astfel o undă periodică.



Unda periodică transversală: capatul liber al corzii efectuează o miscare oscilatorie armonică cu:

- → amplitudinea A
- → frecventa ν
- → pulsatie ω
- → perioada $T = 1/\nu = 2\pi/\omega$

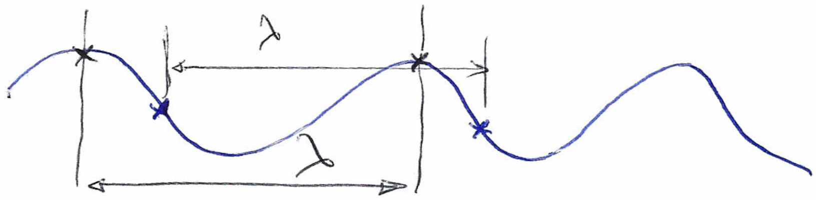
Unda rezultanta va prezenta minime si maxime periodice si simetrice. Undele periodice produse prin oscilatie armonică sunt unde sinusoidale.

Obs

1) Orice undă periodică se poate reprezenta ca si o combinatie liniară de unde sinusoidale, cf. dezvoltării in serie Fourier (vezi matematica).

2) La propagarea unei unde periodice intr-un mediu particulele acestuia efectuează o miscare oscilatorie armonică.

Pentru o undă periodică, forma corzii prezintă o caracteristică repetitivă numită lungime de undă



$$[\lambda]_{SI} = m$$

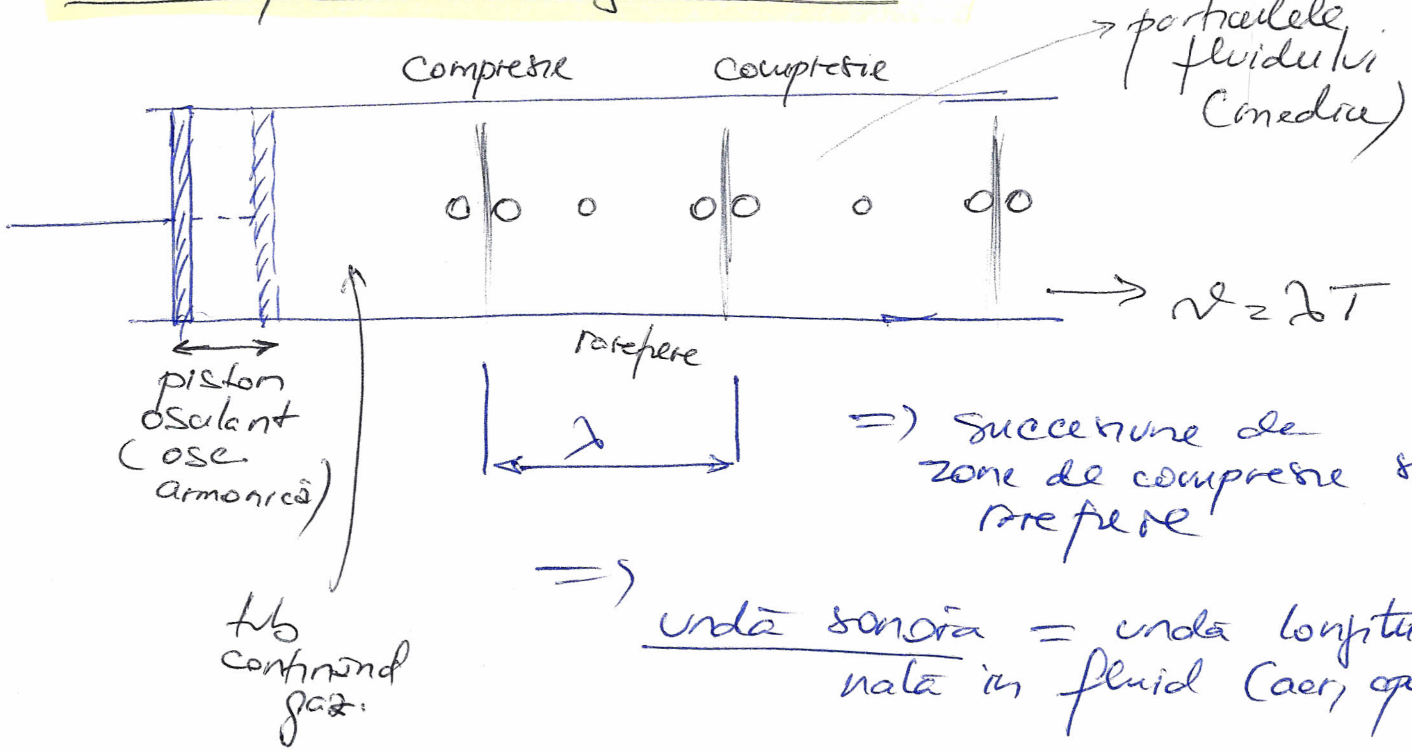
Două puncte separate de λ oscilează în fază.

Unda se deplasează cu viteza constantă v și avansează cu distanța λ într-un timp T numit PERIOADA UNDEI

$$T = \frac{\lambda}{v} \; ; \Rightarrow \boxed{v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu}$$

Obs: Unda într-o coardă este un exemplu 1D însă toate conceptele enunțate sunt valabile și în cazul unei unde 3D.

Unde periodice longitudinale



⇒ succesiune de zone de compresie și rarefiere

⇒ undă sonoră = undă longitudinală în fluid (aer, apă...)

(3) DESCRIEREA MATEMATICA A UNDELOR

Dincolo de elementele ($\nu, \lambda, v, \omega, T$) o undă periodică este descrisă matematic printr-o funcție de undă care descrie poziția unei particule individuale din mediu de propagare la momentul t.

Pt. o undă transversală funcția de undă $y = y(x, t)$ descrie deplasarea y din poziția de echilibru a unei particule aflate în punctul x de-a lungul direcției de propagare, la momentul t.

Funcția de undă a unei unde sinusoidale

Proprietăți:

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= y(x+\lambda) \\ y(x,t) &= y(x, t+T) \end{aligned}}$$

periodicitate spațială

periodicitate temporară

$\Leftrightarrow$ o undă este un fenomen periodic în spațiu și timp

O funcție care verifică simultan condițiile de periodicitate de mai sus și care descrie o undă sinusoidală este:

$$\boxed{y(x,t) = A\cos\left[2\pi\left[\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right]\right]}$$

undă sinusoidală propagativă de-a lungul direcției $+OX$

Dacă introducem notația:

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

număr de undă

$[k] = rad/m$

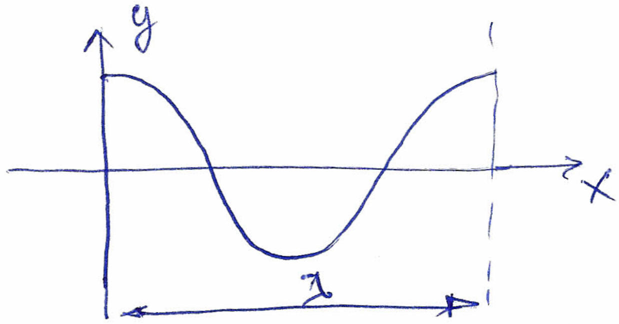
și $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(x,t) = A\cos(kx-\omega t) \quad \longrightarrow \\[2ex] y(x,t) = A\cos(kx+\omega t) \quad \longleftarrow \end{cases}$$

undă sinusoidală care se propagă de-a lungul $+x$

— " — " — propagare de-a lungul $-x$

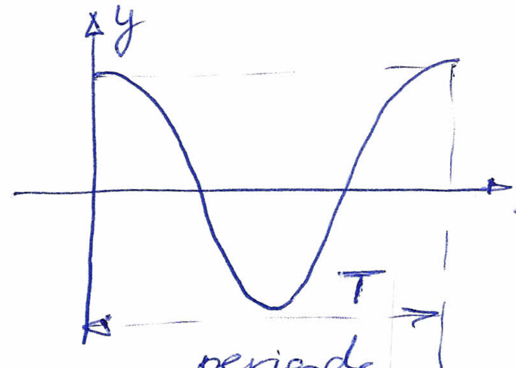
Reprezentare grafică a funcției de undă



lungime de undă

la $t=0$ curba reprezintă forma corzii

$$\boxed{y(x,t=0) = A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x}$$



perioada

evoluția temporară a poziției particulelor la $x=0$

$$\boxed{y(x=0,t) = A\cos 2\pi\frac{t}{T}}$$

Cantitatea $(kx \pm \omega t)$ se numește <u>FAZA UNDEI</u> este o mărime unghiulară și se exprimă în radiani.

În <u>maxime</u>: $kx \pm \omega t = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots = 2n\pi$

$\cos(kx \pm \omega t) = 1 \Rightarrow y = +A$

În <u>minime</u>: $kx \pm \omega t = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots = (2n+1)\pi$

$\cos(kx \pm \omega t) = -1 \Rightarrow y = -A$

Viteza undei: → viteza cu care trebuie să mă deplasez odată cu unda pt a menține într-un punct dat (ex. maxim) faza constantă

$\Rightarrow kx - \omega t = \text{const}$ $\quad \frac{d}{dt}(kx - \omega t) = 0 \iff$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v}$$

viteza undei sau VITEZA DE FAZĂ

Ecuația diferențială a undei

Din ~~expresia~~ expresia funcției de undă:

$y = A\cos(kx - \omega t)$ se poate deduce viteza și accelerația particulei care oscilează în orice moment t $\neq$ viteza undei

Viteza particulei:

$$v_y(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \omega A \sin(kx - \omega t)$$

$\Rightarrow$ funcție periodică
valoare maximă $(v_y)_{max} = \pm \omega A$

poate fi mai mare, egală sau mai mică decât viteza v de propagare a undei, depinzând de A și ω!

Accelerația particulei

$$a_y(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}(v_y(x,t)) = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\boxed{a_y(x,t) = -\omega^2 A\cos(kx - \omega t) = -\omega^2 y(x,t)} \quad (1)$$

Se pot analog calcula derivatele $y(x,t)$ în raport cu timpul care reprezintă:

$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$ = panta corzii în poziția x la momentul t.

$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$ = curbura corzii — " — " —

$$\boxed{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -kA^2 \cos(kx-\omega t) = -k^2 y(x,t)} \quad (2)$$

Combinând ec (1) și (2) $\Rightarrow$ (și utilizând $v = \frac{\omega}{k}$)

$$\boxed{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}}$$

ecuația undei (1D)

- → este una dintre cele mai generale ecuații în fizică
- → este valabilă într-un cadru mult mai general, fie că unda este periodică sau nu
- → în cazul undelor electromagnetice, câmpul electric $\vec{E}(x,t)$ și $\vec{B}(x,t)$ satisfac ec. undelor cu $\boxed{v = c}$
  c = viteza luminii; lumina este o undă electromagnetică.

Generalizare în cazul propagării într-un mediu 3D

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Operator Laplace

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 y(x,t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0}$$

ec. dif. generală 3D a undei

4) VITEZA DE PROPAGARE A UNDEI TRANSVERSALE

Una dintre cele mai importante proprietăți a undelor este <u>viteza</u> lor de propagare. Undele electromagnetice au viteza de propagare cea mai mare ($3\cdot10^8$ m/s în vid), undele sonore în aer se propagă cu 344 m/s, de aceea într-o furtună cu fulgere și tunete întâi vedem fulgerul și apoi auzim tunetul.

Ne propunem să corelăm viteza undei într-un mediu cu anumite proprietăți ale mediului.

Se poate demonstra că viteza undelor mecanice este descrisă de următoarea ecuație generală:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{\text{Forța elastică responsabilă de readucerea part. în echilibru}}{\text{Inerția care se opune revenirii part. în echilibru.}}}}$$

Unda transversală într-o coardă

→ forța elastică este tensiunea din coardă $\vec{F}$ care tinde să aducă coarda în poziția neperturbată.

→ inerția care "se opune" reîntoarcerii în poziția de echilibru este masa corzii, mai precis masa/unitatea de lungime (= densitate masică liniară)

$$\mu = \frac{dm}{dx} \quad \text{sau} \quad \mu = \frac{m}{l} \leftarrow \text{lungimea corzii}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}}$$

Unde sonore longitudinale

Presiunea gazului oferă forța de tip elastic iar densitatea gazului este termenul de tip inerție.

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho}}}$$

B = modulul de compresibilitate al gazului

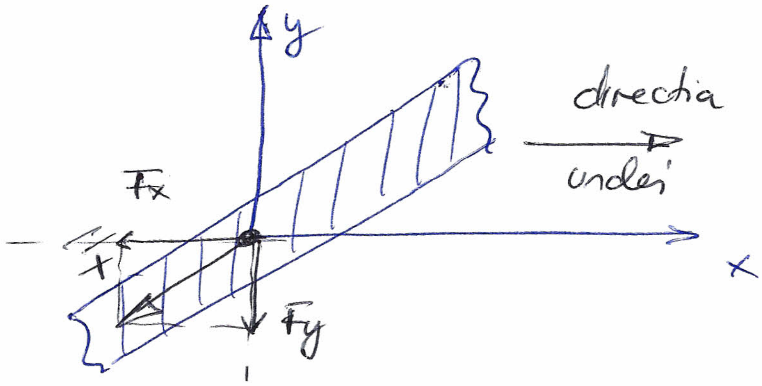
p_0 = presiunea la echilibru

$\gamma = C_p/C_v$ = raportul căldurilor molare

vezi capitolul următor, Acustica.

(5) ENERGIA TRANSPORTATĂ DE UNDE

Considerăm exemplul simplu al undelor transverse într-o coardă:



într-un punct oarecare din coardă

$$\frac{F_y}{F} = -\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$$

Puterea: $P = F_y v_y$ (forța transversală × viteza transversală a particulei.

$$P(x,t) = -F\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\cdot\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$$

Pt. o undă sinusoidală: $y = A\cos(kx-\omega t)$

$$\Rightarrow P(x,t) = Fk\omega A^2 \sin^2(kx-\omega t)$$

$$v = \frac{k}{\omega};\quad v^2 = F/\mu \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{P(x,t) = \sqrt{F\mu}\,\omega^2 A^2 \sin^2(kx-\omega t)}$$

Puterea maximă: $\sin^2\omega t = 1 \Rightarrow \boxed{P_{max} = \sqrt{F\mu}\,\omega^2 A^2}$

Puterea medie $\langle \sin^2\omega t\rangle = 1/2 \Rightarrow \boxed{P_{med} = \frac{1}{2}\sqrt{F\mu}\,\omega^2 A^2}$

$\Rightarrow$ viteza medie a transferului de energie $\sim P_{med}$

$\sim \omega^2 A^2$ valabil pt orice undă mecanică

- Pt. unde electromagnetice $P \sim A^2$ dare este independentă de ω.

Intensitatea undei

Undele transportă energie în spațiu. În cazul corzii transportul este 1D însă alte tipuri de unde (seismice, unde sonore în aer...) transportă energie în toate cele 3 direcții ale spațiului.

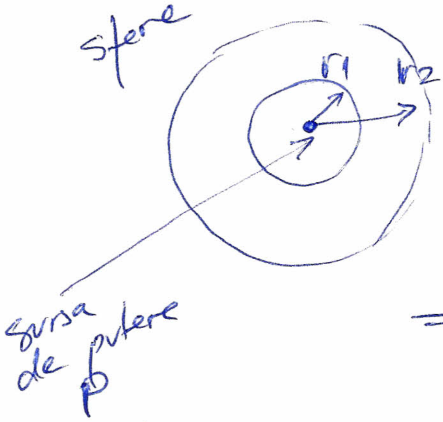
DEF: Pentru o undă tridimensională definim intensitatea I ca și viteza medie cu care energia este transportată de undă printr-o suprafață perpendiculară la direcția de propagare a undei

$$\Rightarrow \quad I = \frac{E}{t \cdot S} = \frac{P}{S} \qquad [I] = \frac{W}{m^2}$$

Dacă unda se propagă sferic de la o sursă $\Rightarrow$

$$\boxed{I \sim \frac{1}{r^2}}$$

$$I_1 = \frac{P}{4\pi r_1^2} \qquad I_2 = \frac{P}{4\pi r_2^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$



Energia se distribuie pe sfere de raze din ce în ce mai mare

$\Rightarrow$ suprafețe $4\pi r^2$ crescătoare

$\Rightarrow$ atenuare geometrică a intensității în $\frac{1}{r^2}$

Obs: În cazul 1D atenuarea la propagare este mai mică decât în $1/r^2$ (vezi capitolul unde/acustică).

INTERFERENȚA oscilațiilor / undelor

$$\begin{cases} y_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

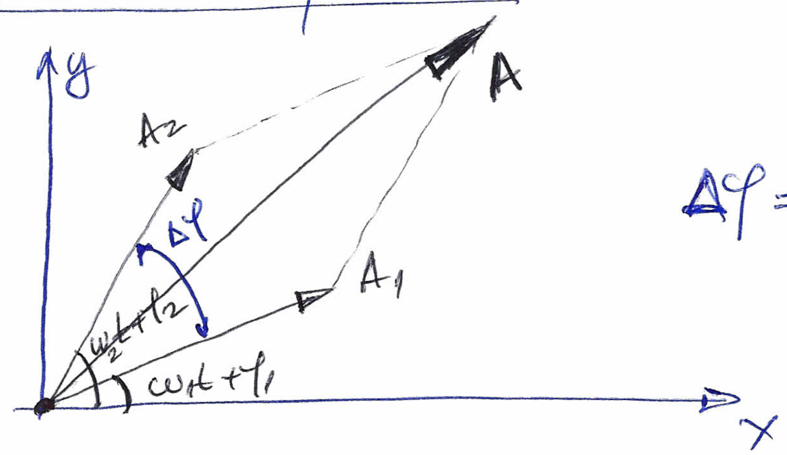
considerăm două oscilații care se suprapun

Ne propunem să calculăm oscilația rezultantă:

$$y = y_1 + y_2 = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Reprezentarea fazorială:

fazor = vector rotitor



$$\Delta\varphi = (\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\Delta\varphi$$

Valoarea medie $\langle A^2 \rangle \sim$ intensitatea undei I

$$\langle A^2 \rangle = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \int_0^T \cos[(\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1)]dt$$

integrala este zero pentru $\omega_1 \neq \omega_2$

În acest caz nu apare fenomenul de interferență și:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 \Rightarrow I = I_1 + I_2$$

Dacă $\omega_1 = \omega_2$, pt. a avea interferență trebuie ca termenul

$\boxed{\varphi_1 - \varphi_2 = \text{constant în timp}}$

$\Rightarrow$ unde coerente = diferența de fază constantă în timp

Atunci:

$$\langle A^2 \rangle = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

• $\boxed{\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi}$ $\Rightarrow \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ maxime de interferență

$$I \sim A^2 = \underline{max = (A_1 + A_2)^2}$$

• $\boxed{\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (2n+1)\pi}$ $\Rightarrow \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$

$n = 0, 1, \ldots$

$$I \sim A^2 = min = \underline{(A_1 - A_2)^2}$$

În funcție de lungimea de undă: λ

$\varphi = \omega t - kx$ $\qquad$ $\Delta\varphi = 2n\pi \Rightarrow k\Delta x = 2n\pi$

$\Delta\varphi = k\Delta x$ $\qquad$ $\cancel{\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = 2n\pi}$

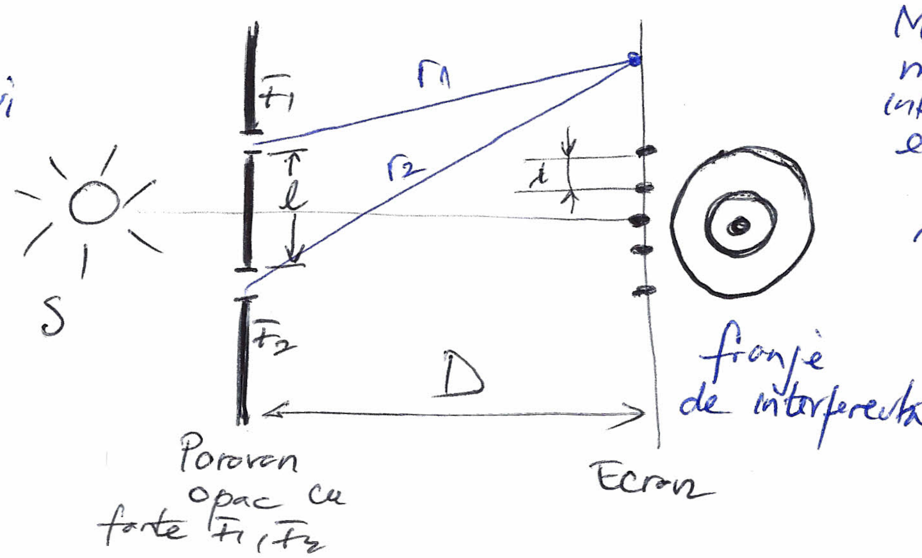
$\Rightarrow \boxed{\Delta x = 2n\frac{\lambda}{2}}$ maxim de interferență

analog $\boxed{\Delta x = (2n+1)\frac{\lambda}{2}}$ minim de interferență

(Obs: Dacă $A_1 = A_2 \Rightarrow I_{min} = 0$)

Obs: Interferența este un fenomen specific undelor, indiferent de natura lor

Experimentul lui Thomas Young



Maxime și minime de intensitate pe ecran

$$i = d_{n+1} - d_n = \frac{\lambda D}{l}$$

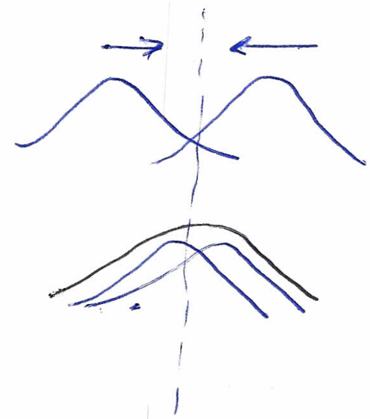
6 INTERFERENȚA UNDELOR. CONDIȚII LA LIMITĂ

Interferența reprezintă fenomenul de suprapunere spațială a unor unde care trec într-un moment t în aceeași zonă din spațiu.

Principiul suprapunerii:

$$\boxed{y(x,t)=y_1(x,t)+y_2(x,t)}$$

oscilația rezultantă este suma vectorială a oscilațiilor individuale



Reflexia

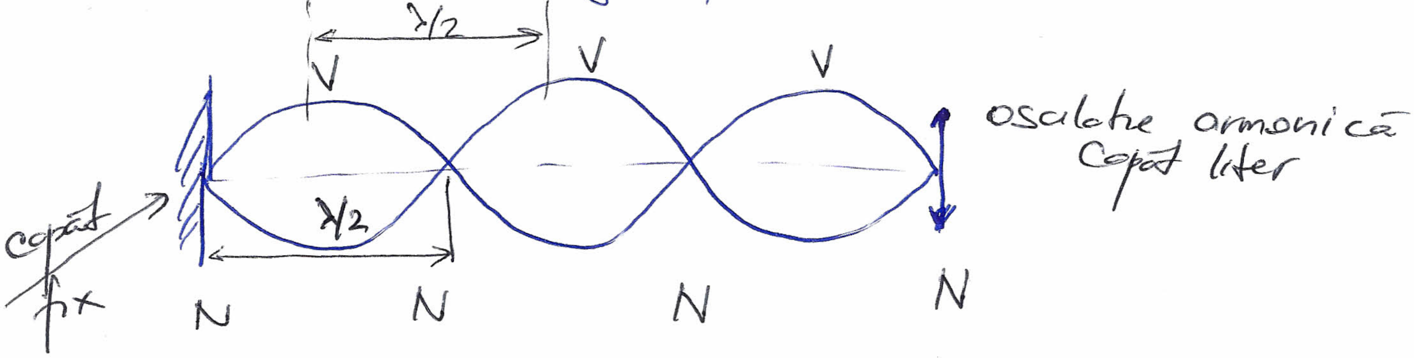
Când o undă ajunge la frontiera dintre două medii de propagare diferite are loc fenomenul de REFLEXIE (ex. producerea ecoului prin reflexia undelor sonore pe stânci sau clădiri)

$\Rightarrow$ Condițiile la limită sunt importante.

7 UNDE STAȚIONARE ÎNTR-O COARDĂ VIBRANTĂ

→ coarda fixată la extremitatea dreaptă

→ extremitatea stângă efectuează o mișcare oscilatorie armonică



La interferența undei care se propagă înspre $-x$ și cea reflectată care se propagă înspre $+x$ apar

maxime = ventre $y = y_{max}$ separate de $\frac{\lambda}{2}$.

minime = noduri $y = 0$

În ventre V ⇒ interferența constructivă

noduri N ⇒ interferența distructivă

Matematic:

$$y_1(x,t) = -A\cos(kx+\omega t)$$ unda incidentă ⟵

$$y_2(x,t) = A\cos(kx-\omega t)$$ undă reflectată ⟶

obs: există un defazaj cu π între cele 2 de unde semnul −

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) =$$

$$= A\left(-\cos(kx+\omega t) + \cos(kx-\omega t)\right)$$

$$\boxed{\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}$$

$$= -2A\sin\left(\frac{kx\cancel{-\omega t}+kx\cancel{+\omega t}}{2}\right)\sin\left(\frac{\cancel{kx}-\omega t\cancel{-kx}-\omega t}{2}\right)$$

$$= 2A\sin kx\sin\omega t \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{y(x,t) = \left(A_{us}\sin kx\right)\sin\omega t} \Rightarrow$$

⟶ amplitudinea undei staționare $A_{us} = 2A$ = dublul amplitudinii undelor inițiale.

$$y(x,t) = (\text{funcție de } x) \times (\text{funcție de timp})$$

$A_{us}\sin kx$ în orice moment de timp forma coardei este aceeași (aceeași poziție pt noduri și ventre

în mod diferit față de undele propagative, unda staționară rămâne în aceeași poziție, oscilând în sus și în jos după ωt (în $\sin\omega t$).

→ Fiecare punct din coardă efectuează o mișcare oscilatorie armonică. Toate punctele dintre două noduri oscilează în fază.

→ Poziția nodurilor:

$$\sin kx = 0 \Rightarrow kx = n\pi \Rightarrow x = \frac{n\pi}{k}$$

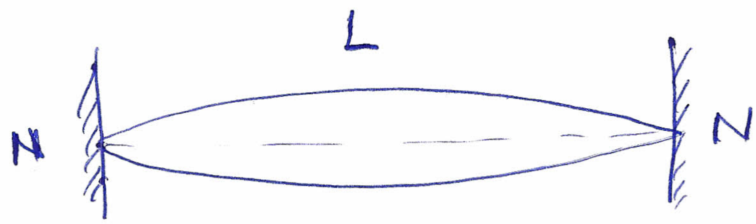
$$k = 2\pi/\lambda \Rightarrow \boxed{x = n\frac{\lambda}{2}}$$

Obs: Spre deosebire de o undă propagativă, o undă staționară nu transportă energie între 2 puncte din spațiu. Cele 2 unde care interferă pt a forma unda staționară transportă cantități egale de energie în direcții diferite ⇒ energia totală medie transportată printr-un punct oarecare este zero.

8 MODURI NORMALE ÎNTR-O COARDĂ VIBRANTĂ

Considerăm cazul unei corzi de lungime L fixată la ambele capete. Este exemplul corzilor din instrumente muzicale: chitară, vioară, ...

Când o astfel de coardă este ciupită, în coardă se produc unde care prin interferență în urma reflexiilor conduc la unde staționare.



Datorită fixării la extremități, condiția limită impusă este de nod în $x = 0$ și $x = L$.

Însă distanța între noduri fiind $\frac{\lambda}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{L = n\frac{\lambda}{2}} \quad \text{impune} \quad \boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}}$$

$n = 1, 2, \ldots$

Obs. Unde pot exista pt orice valoare a lui λ, dar nu unde staționare care verifică ecuația:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

Corespunzător lui λ_n avem frecvența:

$$\boxed{\nu_n = \frac{v}{\lambda_n}} = \frac{v n}{2L} \qquad n=1,2,\ldots$$

Cea mai mică valoare a lui ν_n corespunzând lui λ_n cea mai mare se obține pt $n=1$

$$\boxed{\nu_1 = \frac{v}{2L}} \longrightarrow \text{frecvența fundamentală}$$

Celelalte frecvențe:

$$\boxed{\nu_n = n\frac{v}{2L}}$$

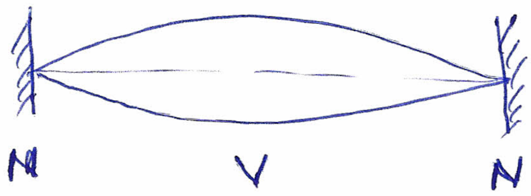
se numesc armonici $n=2,3,\ldots$

Pt. o coardă vibrantă fixată în $x=0$ și $x=L$, funcția de undă $y(x,t)$ satisface ecuația:

$$\boxed{\begin{aligned} &y_n(x,t) = A_{us} \sin k_n x \sin \omega_n t \\ &\text{cu} \quad \omega_n = 2\pi\nu_n = \frac{2\pi v n}{2L} \\ &\phantom{\text{cu} \quad} k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = 2\pi\frac{n}{2L} \end{aligned}}$$

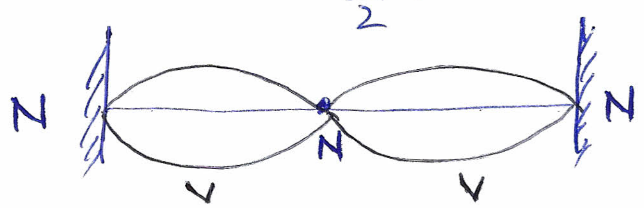
Un <u>mod normal</u> de oscilație a unui sistem oscilant este o mișcare în care toate particulele mediului efectuează o mișcare sinusoidală cu aceeași frecvență

Reprezentare a primelor patru moduri normale dintr-o coardă vibrantă:



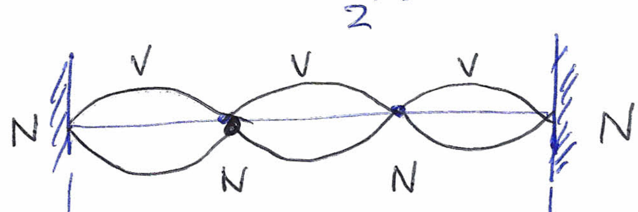
$n=1$ frecventa fundamentala ν_1

$\frac{\lambda}{2} = L$



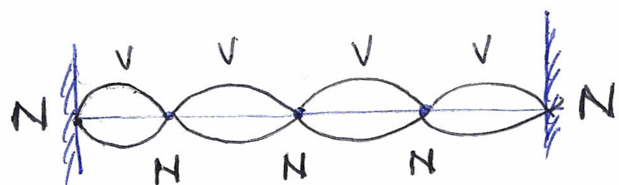
$n=2$ prima armonică ν_2

$2\frac{\lambda}{2} = L$



$n=3$ a doua armonică ν_3

$3\frac{\lambda}{2} = L$



$n=4$ a treia armonică ν_3

$4\frac{\lambda}{2} = L$

Instrumente muzicale cu coardă

$\nu_1 = \frac{v}{2L}$ dar $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ $\Rightarrow$

$\boxed{f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}}$ $\Rightarrow$ frecventa depinde de proprietatile coardei

- reducand L frecventa ν creste (apasand cu degetul o coardă a unei chitari, viori, ...)
- crescând tensiunea F creste frecventa
- crescand masa/unitatea de lungime μ $\Rightarrow$ frecventa descreste $\Rightarrow$ bașii sunt produși cu corzi mai groase.

UNDE STAȚIONARE COMPLEXE

Dacă am putea ciupi o coardă aducând-o într-o poziție corespunzătoare unui mod normal, aceasta ar vibra exact cu frecvența acelui mod. Dar, acesta este un caz absolut ideal, în realitate modurile sunt amestecate

$\Longrightarrow$ compoziție armonică

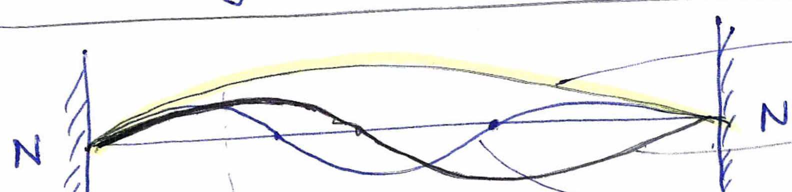
- frecvența fundamentală și mai multe armonice sunt prezente în aceeași vibrație
- mișcarea este o suprapunere a mai multor moduri normale
- sunetul din aer și undele staționare din coardă care l-au produs au compoziție spectrală identică.

Matematic, este posibil să reprezentăm orice mișcare oscilatorie completă a unei corzi ca și o suprapunere de moduri normale. Această reprezentare se numește ANALIZĂ ARMONICĂ sau descompunere în serie Fourier

$$\boxed{y(x,t)=\sum_{j=1}^{n}\left[A_j \cos jkx + B_j \sin jkx\right]}$$

Ex.

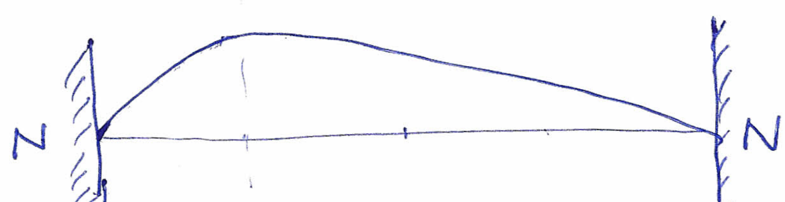
Unda staționară produsă prin ciuprirea unei corzi în $x=\frac{\lambda}{4}$



$y_1(x,0)=A\sin k_1 x$ fundamentala

$y_2(x,0)=\frac{A}{2\sqrt{2}}\sin 2k_1 x$ prima armonică

$y_3(x,0)=\frac{A}{9}\sin 3k_1 x$ a doua armonică



$$y(x,0)=y_1(x,0)+y_2(x,0)+y_3(x,0)$$

includerea de armonici suplimentare îmbunătățește și mai mult reprezentarea

ACUSTICA

sunet & audiție

Acustica se ocupă cu studiul undelor mecanice în gaze, lichide, solide

Undele sonore sau sunetele sunt unde longitudinale mecanice care se propagă într-un mediu (aer, lichid, ...).

Clasa cea mai simplă de unde sonore este cea a undelor sonore sinusoidale care au o anumită:

→ frecvență
→ amplitudine
→ lungime de undă.

Urechea umană este sensibilă la sunete cu frecvența:

• $f \in 20\,Hz - 20\,kHz \Rightarrow$ domeniul AUDIBIL

Undele cu $f > 20\,kHz \Rightarrow$ unde ultrasonice (ultrasunete)

$f < 20\,Hz \Rightarrow$ unde infrasonice (infrasunete)

Sunetele se propagă în toate direcțiile relativ la sursa cu o amplitudine care depinde de direcție și de distanța față de sursă.

Caz ideal: sunetul se propagă de-a lungul unei singure direcții și anume $+x$, va fi descris de o funcție de undă: $\psi(x,t)$

$$\boxed{\psi(x,t) = A\cos(kx - \omega t)}$$

undă progresivă
propagare de-a lungul axei $+x$.

Într-o undă longitudinală particulele mediului oscilează pe o direcție paralelă cu direcția de propagare

Unde sonore și fluctuații de presiune

Urechea umană, microfonul,... sesizează fluctuații de presiune (pun în mișcare o membrană) ex. timpanul $F = pS$)

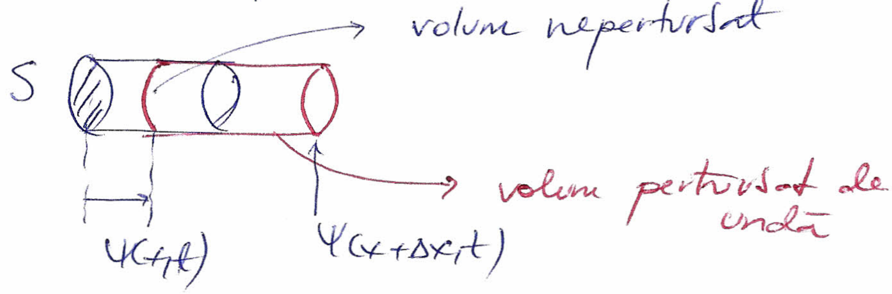
$p(x,t)$ → reprezintă fluctuația instantanee de presiune într-un gaz datorată undei sonore în poziția x la momentul t.

→ = cantitatea cu care presiunea variază față de presiunea medie la echilibru p_a

→ poate fi fluctuație pozitivă sau negativă.

⇒ presiunea absolută $p_a + p(x,t)$

Relația între $p(x,t)$ și $\psi(x,t)$



O undă sonoră deplasează extremitatea stângă a cilindrului (volum elementar de fluid) cu $\psi(x,t)$ iar extremitatea dreaptă cu $\psi(x+\Delta x,t)$

Folosind definiția modulului de compresibilitate:

$$B = -\Delta p \frac{1}{\frac{\Delta V}{V_0}} \Rightarrow$$

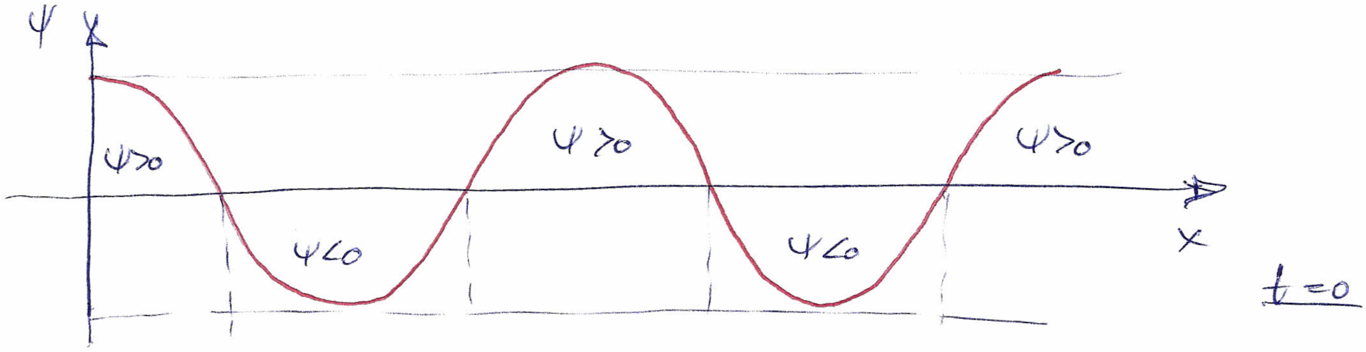
$$\frac{dV}{V} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S[\psi(x+\Delta x,t) - \psi(x,t)]}{S\Delta x} = \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow p(x,t) = -B\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \\ &\text{Însă } \psi(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{p(x,t) = BkA \sin(kx - \omega t)}$$

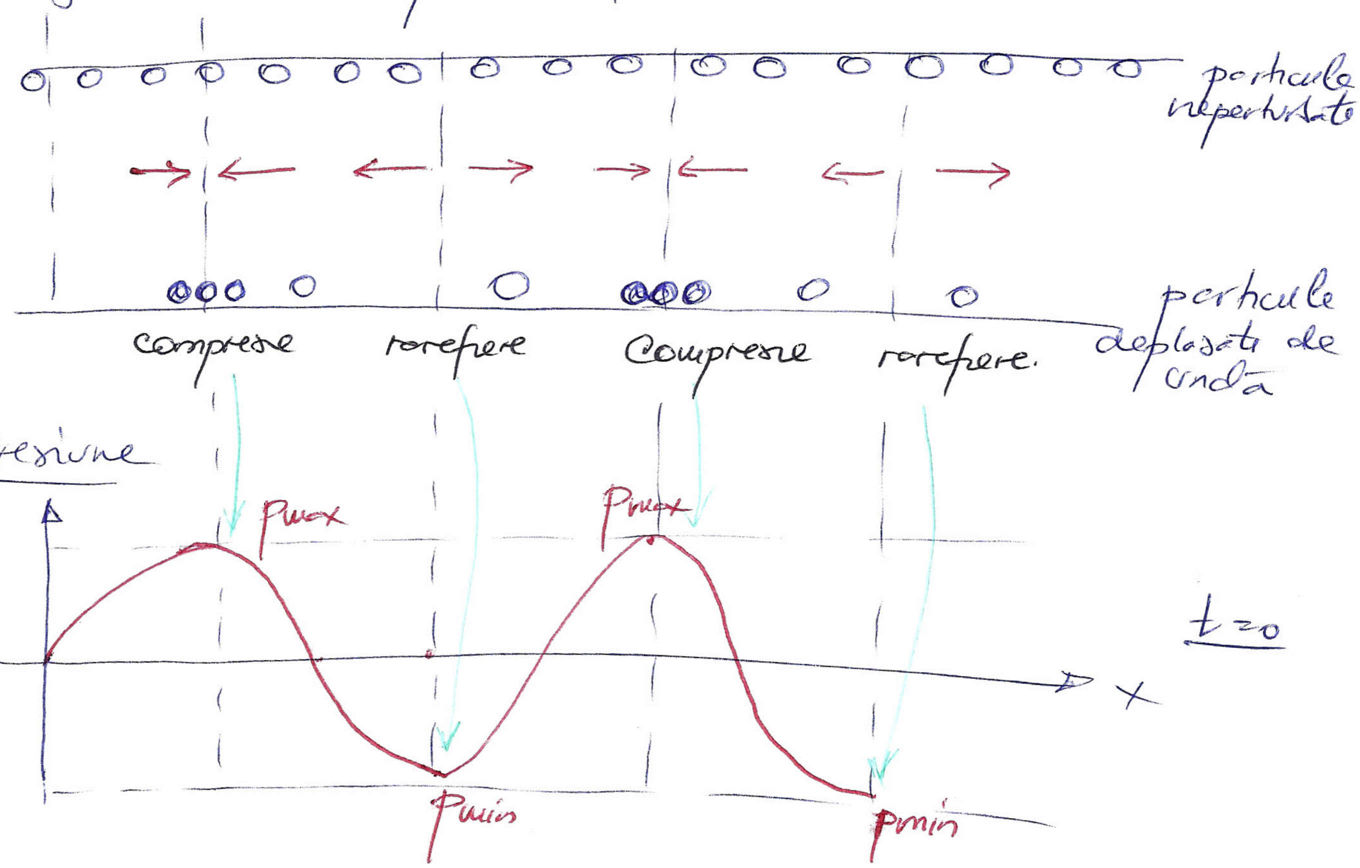
Putem descrie unda sonoră în 3 moduri diferite:

① Funcția de undă   descrie deplasarea particulelor față de echilibru



② Imagine ilustrând deplasarea particulelor individuale

③ Presiune



$$p = BkA \sin(kx - \omega t)$$

$$\Rightarrow \boxed{p_{max} = BkA}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\boxed{p_{max} = \frac{2\pi}{\lambda} BA}$$

Sunetele cu λ mici (ν mare) au o fluctuație de presiune mai mare pt. o amplitudine dată.

Percepția undelor sonore

→ este legată de percepția ascultătorului (senzorului de detecție)

Pentru o frecvență dată, cu cât este mai mare amplitudinea de fluctuație a presiunii, cu atât este mai puternică ~~tentensitatea~~ intensitatea sunetului perceput.

Relația dintre amplitudinea fluctuației presiunii și intensitatea sunetului perceput este complexă și variază de la o persoană la alta.

De asemenea, urechea nu are o sensibilitate spectrală constantă (pt toate frecvențele din spectrul audibil).

Tonul sunetului → după ton, sunetele sunt clasificate în:

ν frecvența ν [Hz]

→ sunete joase $\nu \searrow$

→ sunete înalte $\nu \nearrow$

Compoziția spectrală a sunetului (timbrul)

Sunetele muzicale au o compoziție complexă, pe lângă frecvența fundamentală suprapunându-se armonici.

Două tonuri produse de către instrumente diferite pot avea aceeași frecvență fundamentală însă un conținut diferit în armonice. În consecință, ele vor suna diferit. Aceasta definește noțiunea de TIMBRU sau "culoare" a sunetului.

Zgomot = combinație a tuturor frecvențelor, nu doar a multiplelor de frecvență fundamentală

Zgomot alb = zgomot cu o compoziție spectrală în care amplitudinile frecvențelor componente sunt egale

ex: apa unui râu (cascadă), pronunțarea consoanei "s"

Viteza undelor sonore

→ Într-un fluid de modul de compresibilitate B și densitate ρ:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}}$$

→ Într-un solid de modul de Young Y și densitate ρ

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}}$$

Exemple:

	Material	Viteza sunet (m/s)
Gaze:	aer (20°C)	344 m/s
	He (20°C)	999 m/s
	H (20°C)	1330 m/s
Lichide	He (4K)	211
	Hg (20°C)	1451
	apă (0°C)	1402
	(20°C)	1482
	(100°C)	1543
Solide	Al	6420
	Pb	1960
	oțel inox	5941

Viteza sunetelor în gaze (aer)

$$B = \gamma\, p_0$$

$\gamma = 1{,}4 = \frac{C_p}{C_v}$ raportul căldurilor molare = exponent adiabatic

La presiune atmosferică normală:

$$p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5\ Pa$$

$$\Rightarrow B = 1{,}4 \cdot 1{,}013 \cdot 10^5 = 1{,}42 \cdot 10^5\ Pa$$

Densitatea gazului depinde de presiune ⟹

$\frac{B}{\rho}$ nu depinde de presiune ci doar de temperatura

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}}\ \boxed{\sim \sqrt{T}}$$

T = temp. absolută (K)

R = constanta gazelor perfecte = 8,314 J/mol K

M = masa molară = masa unui mol

EX Viteza sunetului în aer

$T = 20°C = 293 K$

Masa moleculară medie a aerului (N_2/O_2) $= 28,8 \cdot 10^{-3}$ kg/mol.

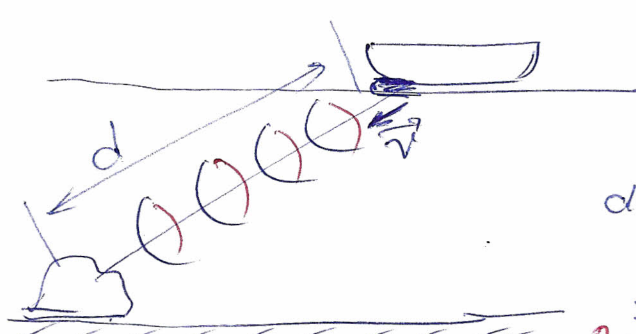
$\gamma = 1,4$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = 344\ m/s$$

Folosind: $\lambda = \frac{v}{\nu} \Rightarrow \lambda = 17m$ pt $\nu = 20\ Hz$

$\lambda = 1,7cm$ pt $\nu = 20\ KHz$

Aplicație SONARUL și IMAGISTICA ULTRASONICĂ



Sonarul folosește unde sonore subacvatice pentru a detecta obiecte subacvatice măsurând distanța din măsurarea timpului de deplasare dus-întors a undei

Obs Rezoluția sonarului

$$\boxed{\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{\sqrt{B/\rho}}{\nu}}$$

pt $\nu = 262\ Hz \Rightarrow \lambda = \underline{5,65\ m}$

~~Precizia~~ Acuratețea (Rezoluția) sonarului $\sim \lambda$ ⟹ poate detecta obiecte cu dimensiuni $> \lambda$

Delfinii: emit ultrasunete cu $\nu \simeq 100\ KHz$ și folosesc ecoul acestora pt ghidare și vânătoare.

Lungimea de undă corespunzătoare este:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{\sqrt{B/\rho}}{\nu} = 1,48 \text{ cm}$$ ⇒ acuratețe foarte fină

Imagistica ultrasonică

→ este o tehnică medicală care folosește exact principiul sonarului. Se folosesc ultrasunete de frecvență f. ridicată (lungime de undă f. mică) care scanează corpul uman și captează ecoul undelor reflectate de către organe pt a constitui pe baza unui soft o imagine.

Dacă se lucrează cu ultrasunete cu $\nu = 5 MHz = 5 \cdot 10^6 Hz$, λ în apă care este principalul constituent al corpului uman este $\lambda = 0,3 mm$ ⇒ rezoluție foarte fină, de acest ordin de mărime.

→ Ultrasunetele se folosesc de asemenea pt. studiul funcționării valvelor inimii, și în conjuncție cu ecografia Doppler (v. efect Doppler) se poate determina viteza de circulație a sângelui în sistemul circulatoriu.

→ Ultrasunetele sunt mai sensibile decât razele X în analiza diverselor categorii de țesuturi, și nu au efecte la fel de distructive / invazive în comparație cu radiația X.

Intensitatea sunetului

Prin definiția intensitatea unei unde mecanice:

I = viteza medie cu care energia undei este transportată prin unitatea de arie perpendiculară pe direcția de propagare

$$y(x,t) = A\cos(kx-\omega t)$$
$$p(x,t) = BkA\sin(kx-\omega t)$$

Viteza particulei: $v_y = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \omega A\sin(kx-\omega t)$

$$\frac{\text{Puterea}}{\text{unitate de suprafață}} = \frac{\text{Forța} \times \text{viteza}}{\text{unitatea de suprafață}} = \text{presiune} \times \text{viteză}$$

$$p(x,t)\, v_y(x,t) = BkA\sin(kx-\omega t)\,\omega A\sin(kx-\omega t)$$
$$= B\omega kA^2\sin^2(kx-\omega t)$$

Intensitatea fiind definită ca medie:

$$\langle\sin^2(kx-\omega t)\rangle_T = 1/2$$ media pe o perioadă T

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}Bk\omega A^2$ $\qquad v^2 = \frac{B}{\rho}$ $\qquad \omega = vk$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{2}\sqrt{B\rho}\,\omega^2A^2}$$ intensitatea unei unde sonore sinusoidale

Discuție

Această ecuație explică de ce într-un sistem acustic un woofer de joasă frecvență trebuie să vibreze la o amplitudine mult mai mare decât un tweezer de frecvență înaltă pentru a produce un sunet de o intensitate identică.

Intensitate sonoră şi amplitudine de presiune

$$p_{max} = BkA \quad \Rightarrow \quad A = \frac{p_{max}}{Bk}$$

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{B\rho}\,\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\rho B}\,\frac{B}{\rho}\,\cancel{k^2}\cdot\frac{p_{max}^2}{B^2\cancel{k^2}} \Rightarrow$$

$\omega = vk$
$= \sqrt{\frac{B}{\rho}}\,k$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{I} = \frac{1}{2}\frac{p_{max}^2}{\sqrt{\rho B}}}$$

intensitatea unei unde sonore sinusoidale în funcţie de fluctuaţia de presiune.

Puterea totală transportată printr-o suprafaţă perpendiculară pe direcţia de propagare a sunetului este produsul dintre intensitate şi arie (dacă $\dot{I}$ este constant pe aria respectivă)

Ex: Puterea totală a sunetului emis de:

- o persoană care vorbeşte: $\sim 10^{-5}$ W
- o boxă muzicală: $\sim 10^{-2}$ W
- toate persoanele din New-York vorbind simultan ($\simeq$ 8,3 milioane) $\simeq$ 100 W (cât un bec cu incandescenţă)

- Dacă sunetele sunt emise ~~în~~ se propagă în toate direcţiile şi aici avem: o descreştere a intensităţii în $1/r^2$

$$\boxed{\dot{I} \sim \frac{1}{r^2}}$$

- Dacă ele se propagă unidirecţional atenuarea este mai redusă. De aceea punem mâinile la gură când strigăm pe cineva departe...
- Atenuarea în $1/r^2$ nu se aplică în spaţii închise datorită reflexiilor multiple pe pereţi $\Rightarrow$ design inteligent al încăperii pt. a avea $\dot{I}$ = ct

Scala în dB

Întrucât urechea umană este sensibilă pe o gamă largă de intensitate se impune necesitatea introducerii unei scale de intensitate logaritmică.

$\Rightarrow$ Nivelul de intensitate sonoră β definit ca și:

$$\boxed{\beta = 10\,dB \log \frac{I}{I_0}} \qquad [\beta] = dB$$

$I_0 = 10^{-12}\,\frac{W}{m^2}$ intensitate sonoră de referință
$\triangleq$ limita audibilă de către urechea umană la $\nu = 1\,kHz$

$1\,dB = \frac{1}{10}\,Bell$ (Alex. Graham Bell = inventatorul telefonului)

Dacă: $I = 10^{-12}\,\frac{W}{m^2} \Rightarrow \beta = 0\,dB$

$I = 1\,W/m^2 \Rightarrow \beta = 120\,dB$ limita de durere peste care un sunet produce o reacție fiziologică dureroasă

Nivelul de zgomot maxim admis într-o sală prin norme de securitate a muncii este de 75 dB. $\Rightarrow$ necesitatea purtării de căști dacă $\beta > 75\,dB$

Exemple:

$\rightarrow$ avion militar zburând la 300 m de sol: $140\,dB \rightarrow 10^{2}\,W/m^2$

$\rightarrow$ șoapta medie : $20\,dB \rightarrow 10^{-10}\,W/m^2$

$\rightarrow$ foșnetul frunzelor : $10\,dB \rightarrow 10^{-11}\,W/m^2$