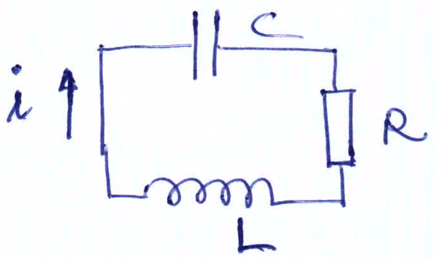
OSCILAŢII MECANICE ŞI ELECTROMAGNETICE

Oscilatorul armonic constituie un exemplu de miscare periodică de o importanţă majoră, deoarece serveşte ca model exact sau aproximativ pentru multe probleme de fizică clasică sau cuantică.

Ne propunem să găsim expresia variaţiei sarcinii electrice Q în funcţie de timp într-un circuit RLC



Nu avem surse de tensiune în circuit $\Rightarrow$ suma tensiunilor pe cele 3 componente este zero

$$V_C + V_R + V_L = 0 \qquad \begin{cases} V_C = \dfrac{Q}{C} \\ V_L = L\dfrac{di}{dt} \\ V_R = iR \end{cases}$$

$$\Rightarrow L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{L}{C} = 0 \qquad \text{însă} \quad i = \frac{dq}{dt}$$

$$\Rightarrow L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0}$$

Această ecuaţie este analogă ec. de miscare a oscilatorului armonic amortizat:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0}$$

$\Rightarrow$ Analogie :

$$\begin{cases} x \longleftrightarrow q \\ b \longleftrightarrow R \\ m \longleftrightarrow L \\ K \longleftrightarrow 1/C \end{cases}$$

Conform soluției problemei mecanice ; $\delta = \frac{b}{2m}$

$$x(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega' t + \varphi) \qquad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \; ; \quad Q = \frac{\omega_0}{\delta}$$

aici vom avea

$$\boxed{q(t) = q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega' t + \varphi) \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{4L^2}} \Rightarrow$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

factorul de calitate :

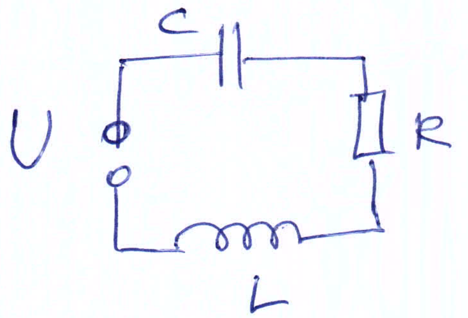
$$Q = \frac{\omega_0}{\delta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Din expresia factorului de calitate se vede că pt a obține un Q mare circuitul trebuie realizat cu rezistența cât mai mică și cu un raport $\frac{L}{C}$ cât mai mare

Oscilatii electromagnetice fortate

Oscilatiile electromagnetice amortizate devin fortate dacă în circuitul RLC se introduce o sursă de tensiune alternativă

$$U = U_0 \cos \omega_E t$$



$$\Rightarrow U_C + V_R + V_L + U = 0$$

$$\frac{Q}{C} + iR + L\frac{di}{dt} + U = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{LC} + \frac{U_0}{L}\cos\omega_E t = 0}$$

Prin analogie cu ec. def a oscilatiilor mecanice fortate în care am arătat că amplitudinea este:

$$A = \frac{F_{max}}{\sqrt{(K - m\omega_E^2)^2 + b^2\omega_E^2}}$$

vom avea:

$$\boxed{Q_{max} = \frac{U_0}{L\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega_E^2\right)^2 + R^2\omega_E^2}}}$$

$$\boxed{tg\,\varphi = \frac{\frac{R}{L}\omega_E}{\omega_E^2 - \frac{1}{LC}}}$$

Intr-un asemenea circuit ne intereseaza modul în care variază intensitatea curentului electric

$$i = \frac{dq}{dt} = \omega_E q_{max} \sin(\omega_E t + \varphi) = I_0 \sin(\omega_E t + \varphi)$$

unde: $$I_0 = \omega_E q_{max} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega_E C} - \omega_E L\right)^2}}$$

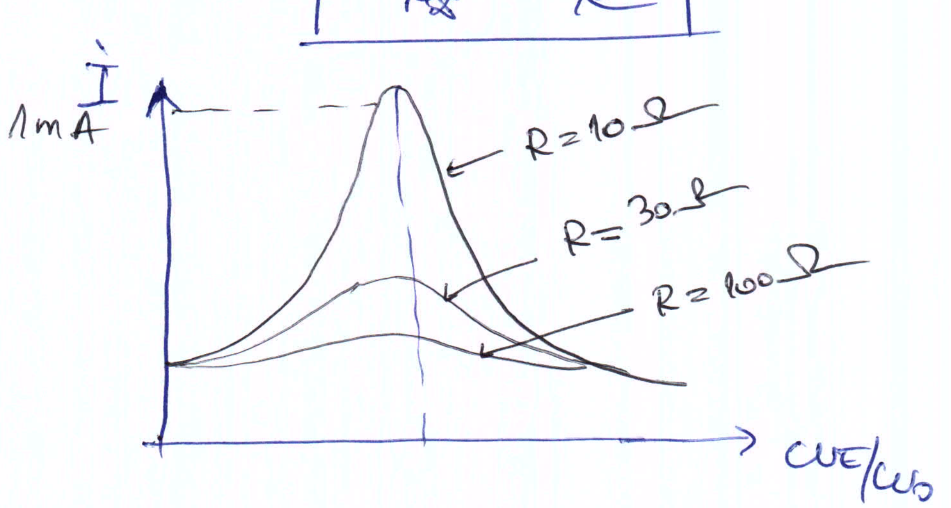
Curentul va avea un maxim pentru:

$$\frac{1}{\omega_E C} = \omega_E L \Rightarrow \boxed{\omega_E = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0}$$

adica la rezonanța când frecventa tensiunii exterioare este egală cu frecventa oscilatilor propri neamortizate

La rezonanță, amplitudinea oscilatilor de curent este determinată în întregime de rezistenți

$$\boxed{I_{0_{rez}} = \frac{U_0}{R}}$$



L = 100 μH
C = 100 μF
E = 10 mV